Análisis estocástico
Ejercicios lll

Girsanov–Principio de reflexión–Procesos de saltos

Entrega: 20 de diciembre, 2012.

1. (a) Utilizar la fórmula para soluciones de ecuaciones lineales estocásticas probada en clase para expresar la función de transición

$$p(x_0, t, y) = \mathbb{P}^{x_0}(X_t \in dy)$$

de un proceso de Ornstein Uhlenbeck

$$dX_t = d\beta_t - \kappa X_t \, dt, \quad X_0 = x_0 \,,$$

con $\kappa > 0$ un parámetro, a tiempo t, como

$$p(x_0, t, y) = \left(\pi \frac{e^{2\kappa t} - 1}{\kappa}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(e^{\kappa t} y - x_0)^2 \left(\frac{e^{2\kappa t} - 1}{2\kappa}\right)^{-1}\right] e^{\kappa t} \,.$$

(b) Aplicando Girsanov, deducir la expresión

$$\mathbb{E}^0 \left[e^{-\frac{1}{2}\kappa^2 \int_0^t \beta_s^2 \, ds}\right] = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\kappa t)}} \,,$$

donde $\cosh(\cdot)$ denota el coseno hiperbólico, y $\beta.$ es un movimiento Browniano estándar, $\beta_0 = 0$.

2. Sea $X_t = (X_t^1, X_t^2)$, $t \geq 0$, un movimiento Browniano 2-dimensional, con posición inicial $X_0 = (0, 1)$. Se define el stopping time

$$T = \inf\{t \geq 0 : \; X_t \in \mathbb{R} \times \{0\}\} \,.$$

Hallar la distribución de $X(T) = \big(X^1(T), 0\big)$.

3. Sea

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} W_t^1 & \frac{1}{\sqrt{2}} W_t^2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} W_t^2 & W_t^3 \end{pmatrix} ,$$

donde W_t^1, W_t^2, W_t^3 son tres movimientos Brownianos independientes en $\mathbb{R}$, $W_0^1 = W_0^2 = W_0^3 = 0$. Probar que la distribución de Γ_t es invariante bajo la conjugación por matrices ortogonales.

4. (Continuación de 3.) Encontrar el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas satisfechas por los autovalores de Γ_t.

5. Sea X_t, $t \geq 0$, un proceso puro de saltos con núcleo de Markov

$$K(x, dy) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},$$

y consideremos las medidas asociadas

$$\mu(dt, dx) = \sum_{n \geq 1} \delta_{J_n, \Delta X_{J_n}}(dt, dx), \qquad \Delta X_{J_n} = X_{J_n} - X_{J_{n-1}}$$
$$\nu(dt, dx) = K(X_{t-}, dx)\, dt.$$

Sea $M_t := \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} y \left(\mu - \nu\right)(ds, dy)$, que según la versión de la fórmula de Itô para procesos puntuales probada en clase es una martingala local. Usando esta misma descomposición, mostrar que Z_t dada por

$$Z_t = \exp\left[\lambda M_t - \int_0^t \phi(X_s, \lambda)\, ds\right],$$

donde

$$\phi(x, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} (e^{\lambda y} - 1 - \lambda y) K(x, dy),$$

es una martingala local.