Análisis estocástico

Ejercicios – 3/9/2012

1. Encontrar un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ que contenga una sucesión $\xi_i, i \geq 1$, de variables normales estándar (es decir, $N(0,1)$) independientes.

2. Sea $\{B_t,\, t \geq 0\}$ un movimiento Browniano estándar, y consideremos tiempos $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$.

   (a) Probar que el vector aleatorio n-dimensional tiene distribución normal.

   (b) Identificar la matriz de covarianza Γ de $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$, y escribir la pro babilidad $\mathbb{P}(A)$ de un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$ como una integral.

3. Sea $\{B_t,\, t \geq 0\}$ un movimiento Browniano estándar y $U \sim U[0,1]$ una variable independiente. Probar que el proceso

$$\hat{B}_t = \begin{cases} B_t & \text{if } t \neq U\,, \\ 0 & \text{if } t = U\,, \end{cases}$$

   tiene las mismas distribuciones marginales que el movimiento Browniano, pero es discontinuo excepto cuando $B_U = 0$, y por lo tanto $\hat{B}$ no es un movimiento Browniano.

4. Mostrar que, en forma casi segura, en todo punto de su trayectoria, el movimiento Browniano no es Hölder α para $\alpha > 1/2$.

5. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $\Sigma \subset \mathcal{F}$ una sub-sigma álgebra de $\mathcal{F}$. Entonces la aplicación $f \longrightarrow \mathbb{E}[f|\Sigma]$ es una proyección. Específicamente, si consideramos el espacio de Hilbert $H = L_2[\Omega, \mathcal{F}, \mu]$ de todas las funciones $\mathcal{F}$ medibles con el producto interno

$$< f, g >_\mu = \int fg \; d\mu\,,$$

   entonces $H_0 = L_2[\Omega, \Sigma, \mu] \subset H$ y $f \longrightarrow \mathbb{E}[f|\Sigma]$ es la proyección ortogonal de H en H_0. Probarlo.

6. (a) Sea $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ una medida producto en $(\Omega, \mathcal{F}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, y consideremos la sub-$\sigma$ álgebra $\Sigma = \{A \times \Omega_2 :\ A \in \mathcal{F}_1\}$. Probar que si $f(\omega) = f(\omega_1, \omega_2) \in L^1[\Omega]$, entonces $\mathbb{E}[f|\Sigma] = g(\omega)$, donde $g(\omega) = g(\omega_1)$ está dada por

$$g(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mathbb{P}_2\,.$$

(b) En las condiciones del ítem anterior, sea $\mathbb{P}$ absolutamente continua con respecto a la medida producto $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$: $\mathbb{P} = \phi(\omega_1, \omega_2)\, d\mathbb{P}_1 \times d\mathbb{P}_2$. Consideremos la densidad de la distribución marginal de la primera coordenada con respecto a $\mathbb{P}_1$, $\psi(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \phi(\omega_1, \omega_2)\, d\mathbb{P}_2$. Probar que para cualquier función $f \in L^1[\Omega]$ vale que

$$\mathbb{E}[f|\Sigma] = \frac{\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \phi(\omega_1, \omega_2)\, d\mathbb{P}_2}{\psi(\omega_1)}.$$

(Sugerencia: teoremas de Tonelli y Fubini)

7. (a) Probar que si la sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es uniformemente integrable entonces es débilmente compacta en $L^1(\Omega)$. Es decir, existe una subsucesión $\{X_{n_j}\}_{j\geq 1}$ y una v.a. $X \in L^1(\Omega)$ tales que

$$\int X_{n_j} Y\, d\mathbb{P} = \int XY\, d\mathbb{P}$$

para toda $Y \in L^\infty(\Omega)$.

   (b) Concluir que si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una martingala uniformemente integrable entonces existe $X \in L^1(\Omega)$ tal que $X_n \to X$ in $L^1(\Omega)$.

8. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ una filtración de $\mathcal{F}$.

   (a) Probar que $\tau(\omega) \equiv k$ es un stopping time, para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   (b) Probar que si τ_1 y τ_2 son stopping times, entonces $\max\{\tau_1,\, \tau_2\}$ y $\min\{\tau_1,\, \tau_2\}$ también lo son. En particular cualquier stopping time τ es el límite creciente de los stopping times acotados $\tau_n(\omega) = \min\{\tau(\omega),\, n\}$.

9. Sean $\tau_1 \leq \tau_2$ dos stopping times en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ provisto de una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$. Probar la inclusión de σ–álgebras $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.

10. Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ provisto de una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$, τ un stopping time. Probar que τ es $\mathcal{F}_\tau$ medible.