Análisis estocástico

Ejercicios ll – Tiempo continuo – Integral estocástica

22/10/2012

1. Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\{X_t\}_{t\geq 0}$ una $\mathcal{F}_t$–martingala con trayectorias continuas a derecha, tal que existe $p > 1$, $\mathbb{E}[|X|^p] \leq C$ para todo $t \geq 0$. Probar que existe $X \in L^p(\Omega)$ tal que $X_t \to X$ en L^p y c.t.p., y además $X_t = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$.

2. Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ una $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–martingala con trayectorias continuas a derecha, τ un stopping time con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Entonces $X_{\tau\wedge t}$ es una $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–martingala con trayectorias continuas a derecha.

3. Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso con trayectorias continuas tal que para cada $t > 0$, y un $p > 0$ fijo,
$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(p)}(\Pi) = L_t$$
en probabilidad, donde L_t es una variable aleatoria. Probar que si $q > p$, $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(q)} = 0$ (en probabilidad), y para $0 < q < p$, $\lim_{\|\Pi\|\to 0} V_t^{(q)} = \infty$ (en probabilidad) cuando $L_t > 0$.

   Recordar la notación $V_t^{(p)}(\Pi) = \sum_{k=1}^n |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|^q$, donde $\Pi = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = t\}$ es una partición de $[0, t]$.

4. Sea$\{\beta_t\}_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano, $\{\Pi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de particiones del intervalo $[0, t]$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|\Pi_n\| = 0$. Entonces las variaciones
$$V_t^{(2)}(\Pi_n) = \sum_{k=1}^{k_n} |\beta_{t_k^n} - \beta_{t_{k-1}^n}|^2$$
convergen a t en L^2 cuando $n \to \infty$. Si además las particiones son tales que $\sum_n \|\Pi_n\| < \infty$, entonces la convergencia también vale c.t.p.

5. Decimos que un proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es progresivamente medible con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, si la aplicación
$$(s, \omega) \to X_s(\omega) : \big([0, t] \times \Omega,\, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t\big) \to \big(\mathbb{R},\, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$$
es medible, para cada $t \geq 0$.

   Probar que si un proceso es progresivamente medible entonces es adaptado.

6. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad provisto de una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Sea τ un stopping time con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, X un proceso estocástico progresivamente medible con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Probar que X_τ es $\mathcal{F}_\tau$ medible. (Recordar que $\mathcal{F}_\tau = \big\{a \in \mathcal{F},\, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \,\forall\, t \geq 0\big\}$).

7. Sea β_t un movimiento Browniano. Calcular la integral estocástica
$$\int_0^t (\beta_s^2 - s)\, d\beta_s.$$

8. Sea β_t un movimiento Browniano adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Usar la fórmula de Itô para probar que los siguientes procesos son martingalas:
$$a) X_t = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\, \sin(\lambda \beta_t) \qquad\qquad b) Y_t = (\beta_t + t)\, \exp\left(-\beta_t - \frac{t}{2}\right).$$

9. Sea $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función medible en $L^2([0,t))$, para todo $t > 0$, β_s un movimiento Browniano. Probar que el proceso $\int_0^t h(s)\, d\beta_s$ es Gaussiano, y calcular sus covarianzas.

10. Sea X_t una solución a la ecuación diferencial estocástica
$$dX_t = \sigma(X_t)\, d\beta_t, \qquad X_0 = x_0,$$
donde σ es Lipschitz y β_t es un movimiento Browniano. Probar que, para alguna constante $C < \infty$ que depende solamente de la constante Lipschitz de σ, X_t satisface
$$E\left[\sup_{s\leq t} |X_s - x_0|^2\right] \leq Ct\, e^{Ct} |\sigma(x_0)|^2 .$$

11. Sean $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotadas con derivadas acotadas, $a > 0$. Supongamos que $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ es acotada y una solución del problema de Cauchy
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\, a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\, \frac{\partial u}{\partial x} + c(x)\, u\,, \quad u(0,x) = f(x) \quad \text{en } \mathbb{R}\,.$$
Sea $\sigma(x) = \sqrt{a(x)}$, y X la solución de la ecuación diferencial estocástica
$$dX_t = \sigma(X_t)\, d\beta_t + b(X_t)\, dt\,, \qquad X_0 = x_0\,.$$
Definamos $I_t := \exp(\int_0^t c(X_s)\, ds)$. Probar que
$$u(t,x) = \mathbb{E}^{x_0}\left[I_t\, f(X_t)\right] .$$

12. Considerar la ecuación diferencial estocástica $dX_t = \sigma(X_t)\, d\beta_t$, $X_0 = 0$, donde $\sigma : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es localmente Lipschitz, $\sigma \equiv 1$ en $(-\infty, 0]$. Probar que el tiempo de explosión de X es infinito.
(Sugerencia: usar que X puede escribirse como un movimiento Browniano con el tiempo cambiado).