Análisis Complejo

Práctica N°8.

1. Probar que
$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|<1$, probar que
$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)=\frac{1}{1-z}.$$

3. (a) Probar que si $|z|<\frac{1}{2}$ entonces:
$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|.$$

   (b) Probar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge absolutamente. Mostrar que el enunciado es falso si no se pide convergencia absoluta.

4. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$$
converge normalmente en $B(0,1)$ (y por lo tanto define una función holomorfa en $B(0,1)$).

5. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2z-1}{n^2z+1}$$
define una función holomorfa en $\{\mathrm{Re}(z)>0\}$. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

6. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$$
define una función entera. Hallar los ceros de esta función y sus multiplicidades.

7. Probar que
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$
define una función entera.

8. *Funciones holomorfas con ceros prefijados en la bola unidad.*

   (a) Sean $a, z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que $0 < |a| < 1$ y $|z| \leq r < 1$. Probar que
   $$\left| \frac{a + |a|z}{(1 - \overline{a}z)a} \right| \leq \frac{1}{1-r}.$$

   (b) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión tal que $0 < |a_n| < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty$. Probar que
   $$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}$$
   define una función holomorfa en $B(0,1)$ y que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0,1)$. ¿Cuales son los ceros de f?

9. Demostrar que existe una función $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfa que no se extiende de manera holomorfa a ningún abierto conexo que contenga a $B(0,1)$ propiamente. (Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)

10. Sea $g(z) = \text{sen}(\pi z)$. Teniendo en cuenta que $\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi\text{cotg}(\pi z)$, demostrar que
$$\frac{\text{sen}(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

11. (a) Probar que si $\text{Re}(s) > 1$, la *función zeta de Riemann* definida por $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ está bien definida.

    (b) Probar que si $\text{Re}(s) > 1$ entonces $\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = \displaystyle\sum_{n \text{ impar}} n^{-s}$.

    (c) Demostrar que existen infinitos números primos.

    (d) Demostrar que $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - p_n^{-s}\right)$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ es la sucesión creciente formada por todos los primos positivos.

12. *Función Gamma.*

    (a) Sea z un número real positivo. Sabiendo que para todos $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $0 < t < n$ vale que
    $$\left| e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq \frac{e^{-t+1}t^2}{2n},$$
    probar que
    $$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

    (b) Integrando por partes n veces, probar que
    $$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+z}.$$

(c) Sea γ la constante de Euler, definida por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$

Probar que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+z}\right) e^{\frac{z}{k}}$$

y deducir que el mismo resultado vale para todo $z \in \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(d) Notar que la fórmula del ítem anterior extiende la definición de Γ al conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Probar que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ vale que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}.$$

Automorfismos

13. (a) Sea f un automorfismo de $B(0,1)$ tal que $f(0) = 0$. Probar que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta} z$ para todo z en $B(0,1)$.

    (b) Probar que $f : B(0,1) \to B(0,1)$ es automorfismo si y sólo si existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in B(0,1)$ tales que para todo z en $B(0,1)$,

    $$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\overline{\alpha} z - 1}.$$

14. (a) Sea $\mathbb{P}$ el semiplano superior (también llamado el semiplano de Poincaré). Es decir, $\mathbb{P} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$. Probar que $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ es automorfismo si y sólo si existen a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc > 0$ tales que para todo z en $\mathbb{P}$,

    $$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

    (b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?

15. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{L} = \{\mathrm{Im}(z) > 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

16. Caracterizar todos los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$. (Sugerencia: recordar el ejercicio 12 de la práctica 6.)

17. Sean Ω un abierto simplemente conexo del plano, f y g dos automorfismos de Ω y a y b dos puntos distintos de Ω. Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, probar que $f(z) = g(z)$ para todo z en Ω.

18. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{C}^*$. (Sugerencia: estudiar el desarrollo de Laurent en 0 de un tal automorfismo.)