

ANÁLISIS COMPLEJO

Práctica N°3.

1. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

$$(a) a_n = \frac{n+1}{2n+1}, \quad (c) a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}, \quad (e) a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$(b) a_n = \frac{n}{2n^2+3}, \quad (d) a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

2. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencia:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} z^n, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n, \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

3. **Criterio de Weierstrass.** Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

4. Sean $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(z_n)_{n \geq 1}$ sucesiones de números complejos. Demostrar los siguientes criterios

(a) **Criterio por partes.** Supongamos que $(a_n z_n)$ converge. Luego $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) z_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - z_{n-1})$ converge.

(b) **Criterio de Dedekind.** Si $\lim a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas (es decir, existe M tal que $|\sum_{n=1}^k z_n| \leq M$ para todo k) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

(c) **Criterio de De Bois-Reymond.** Si $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

(d) **Criterio de Dirichlet.** Supongamos que (a_n) una sucesión decreciente de números reales positivos tal que $\lim a_n = 0$. Luego si las sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

5. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n, \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n, \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n, \quad (i) \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n, \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n, \quad (j) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n z^n,$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n, \quad (k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}.$$

6. Hallar los valores de z para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}, & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}, & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}, \\
 \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}, & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{nz^n}, & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n, \\
 \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}, & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}, & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha z} \right)^n, |\alpha| < 1.
 \end{array}$$

7. Probar que los conjuntos de convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$ son iguales.

8. Probar que si el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$ es también ρ para todo $k \in \mathbb{N}$.

9. Hallar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las funciones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} e^z \operatorname{sen} z, & \text{(c)} \frac{e^z - 1}{z}, & \text{(e)} \frac{1}{\cos z}, \\
 \text{(b)} \operatorname{sen} z \cos z, & \text{(d)} \frac{e^z - \cos z}{z}, & \text{(f)} \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}.
 \end{array}$$

10. Para $n \in \mathbb{N}$, hallar el desarrollo en serie de potencias de la función $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$.

Sugerencia: $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$.

11. Sea $f(z) = \sum_n a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$. Se dice que $f(z)$ es *par* (*impar*) si $a_n = 0$ para todo n impar (par). Mostrar que

- f es par sii $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$,
- f es impar sii $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$.

12. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$.

- (a) Probar que $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ converge en un entorno del origen, y la función $F(z)$ es una función racional. Hallar una fórmula explícita para $F(z)$.
- (b) Descomponiendo $F(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de $F(z)$ en serie de potencias.
- (c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el n -ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

Función logartimo y raíces n -ésimas

13. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama del logaritmo de z* en Ω a toda función continua $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

- (a) Demostrar que toda rama del logaritmo es inyectiva y holomorfa en Ω .
- (b) Sean g_1, g_2 dos ramas de logaritmo en Ω . Demostrar que si Ω es conexo y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$, entonces $g_1(z) = g_2(z) \forall z \in \Omega$.
- (c) Demostrar que si existe una rama del logaritmo en Ω , entonces $\mathbb{S}^1 \not\subseteq \Omega$.

14. Sean $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una rama del logaritmo, $b \in \mathbb{C}$, $a \in \Omega$. Definimos $a^b = e^{b \cdot g(a)}$.
- (a) Verificar que si $b \in \mathbb{Z}$, a^b no depende de la elección de g y coincide con $a \cdots a$.
 - (b) Calcular todos los valores que pueden tomar i^i , $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^π al considerar todas las posibles elecciones del logaritmo.
 - (c) Fijando una rama del logaritmo, mostrar que las funciones $h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $h_1(z) = z^b$ y $h_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h_2(z) = a^z$ son funciones holomorfas.
 - (d) Sean $z \in \Omega$, $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $z^a \in \Omega$. ¿Qué relación hay entre z^{a+b} y $z^a z^b$? ¿Qué relación hay entre z^{ab} y $(z^a)^b$? ¿Y si se sabe que $b \in \mathbb{Z}$?

15. Sea \log la rama principal del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(t) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-t}{i+t} \right).$$

16. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, llamamos *rama de la raíz n -ésima de z* en Ω a toda función continua $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z)^n = z$ para todo $z \in \Omega$. En tal caso, notaremos $\sqrt[n]{z}$ a $g(z)$.
- (a) Probar que si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, hay exactamente dos ramas de \sqrt{z} en Ω . Definirlas.
 - (b) Probar que toda rama de \sqrt{z} es holomorfa.
 - (c) Si Ω es conexo y f es una rama de \sqrt{z} en Ω , entonces f y $-f$ son todas las ramas.
17. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Sea $g(z)$ una rama del logaritmo definida en Ω y sea $\sqrt[3]{z}$ la rama de la función raíz cúbica definida en Ω por $\sqrt[3]{z} = e^{g(z)/3}$.
- (a) Demostrar que para toda rama g , $\sqrt[3]{z}$ pertenece a Ω para todo z en Ω .
 - (b) Hallar todas las ramas g para las cuales $g(\sqrt[3]{z}) = \frac{1}{3}g(z)$ para todo z en Ω .
 - (c) Probar que si se cambia Ω por $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, aumenta la cantidad de ramas que satisfacen el ítem (b).
18. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que para todo n existe $g_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z) = g_n(z)^n$. Demostrar que existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z) = e^{g(z)}$.