Análisis Complejo

Práctica N°2.

1. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Probar que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a + ib \iff \Big(\lim_{z \to z_0} \mathrm{Re}(f(z)) = a \text{ y } \lim_{z \to z_0} \mathrm{Im}(f(z)) = b \Big).$$

2. Dadas $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sean $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y $g(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$. Supogamos que f resulta derivable en $z_0 = a + ib$.

   (a) Probar que g es diferenciable en (a,b).

   (b) Calcular
   $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \text{ y } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$
   en términos de u y v. ¿Qué se deduce?

   (c) ¿Qué relación hay entre $|f'(z_0)|$ y el jacobiano de $Dg(a,b)$?

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + iy = 0. \end{cases}$$

   Probar que f es continua en 0 y se cumple Cauchy-Riemann pero *no* es derivable.

4. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones de $z = x + iy$ y hallar $f'(z)$:

   (a) $f(z) = y + ix$,

   (b) $f(z) = \overline{z}$

   (c) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$,

   (d) $f(z) = x^2 + iy^2$,

   (e) $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$,

   (f) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$,

   (g) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$,

   (h) $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$,

   (i) $f(z) = \overline{z}^{-1}$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 0$,

   (j) $f(z) = \overline{z} e^{\overline{z}}$.

5. Una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de tipo $\mathcal{C}^2$ es *armónica* si $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Por otro lado, una *conjugada armónica* de u es una $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa.

   (a) Probar que si las partes real e imaginaria de una función holomorfa son $\mathcal{C}^2$ entonces son armónicas. Deducir que si u es una función $\mathcal{C}^2$ que admite una conjugada armónica, entonces u es armónica.

   (b) Probar que si v y $\tilde{v}$ son conjugadas armónicas de u, entonces $v - \tilde{v}$ es constante.

(c) Hallar conjugadas armónicas, cuando sea posible, de las siguientes funciones:

i. $u_1(x,y) = x^2 - y^2$, ii. $u_2(x,y) = x^2y^2$, iii. $u_3(x,y) = 2x(1-y)$.

(d) Probar que si v es conjugada armónica de u, las curvas de nivel de u y v son ortogonales.

6. Probar que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa con Ω abierto conexo y $f' \equiv 0$ entonces f es constante. Ayuda: Ver que para todos z_0 y z_1 en Ω existe una curva $\mathcal{C}^1$ a trozos que une z_0 con z_1.

7. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Demostrar:

(a) $\mathrm{Re}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte,
(b) $\mathrm{Im}(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte,
(c) $|f|$ cte $\Rightarrow f$ cte,
(d) $\arg(f)$ cte $\Rightarrow f$ cte,
(e) $\overline{f}$ holomorfa $\Rightarrow f$ cte.

8. Sean dadas n rectas $L_1, \ldots, L_n \subseteq \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$. Probar que si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una funcion holomorfa tal que $g(\mathbb{C}) \subseteq L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$ entonces g es constante.

9. Sea Ω un abierto simétrico respecto del eje real y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funcion holomorfa. Probar que si definimos $g : \Omega \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ entonces g resulta holomorfa.

10. Hallar todas las $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que $f'(0) = 1$ y para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$f(x+iy) = e^x f(iy).$$

Sugerencia: Si $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son tales que $f(iy) = c(y) + is(y)$, probar que $c' = -s$ y $s' = c$.

11. Hallar todas las $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$f(x+iy) = f(x) + f(iy) + 2xyi.$$

12. Hallar todas las $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que $f(w+z) = f(w) + f(z)$ para todos $w, z \in \mathbb{C}$.

13. **Regla de L'Hospital.**
Sean f, g funciones holomorfas en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

14. Calcular:

(a) $\lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$,
(b) $\lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{2z^2+(3-4i)z-6i}$
(c) $\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z-e^{\frac{\pi i}{3}})z}{z^3+1}$,
(d) $\lim_{z\to i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$.

15. Dada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva $\mathcal{C}^1$ sea $v = \gamma'(t_0)$ el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a la curva en $t = t_0$. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $z = f'(\gamma(t_0))$, mostrar que zv es el número complejo que se obtiene transladando al origen el vector tangente a la curva $f \circ \gamma$ en $t = t_0$.

16. Sean $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definidas por $\gamma_1(t) = t$ y $\gamma_2(t) = (1+i)t$. Si $f(z) = \mathrm{sen}(z) + z^4$, calcular en qué ángulo se cortan las curvas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ en $t = 0$.