Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Análisis Complejo

Práctica N°1.

1. Para $z \in \mathbb{C}$, se define $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Probar que:
   (a) Si $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
   (b) $|zw| = |z|\,|w|$ y si $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
   (c) $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$ y $-|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$,
   (d) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w})$ y $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w})$,
   (e) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$,
   (f) $|z + w| \leq |z| + |w|$ y $|z - w| \geq |z| - |w|$.

   Interpretar (e) geométricamente, también conocida como "Ley del paralelogramo".

2. Probar que $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $d(z, w) = |z - w|$ es una métrica.

3. Describir geométricamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:
   (a) $|z - i + 3| = 5$,
   (b) $|z - i + 3| \leq 5$,
   (c) $\mathrm{Re}(2z + 3) \geq 0$,
   (d) $\mathrm{Re}((1 + 2i)z) \geq 0$.

4. **Definición**: Para $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$, se define $e^z = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b)$.
   (a) Demostrar que para todo $z, w \in \mathbb{C}$, $e^{w+z} = e^w e^z$.
   (b) Describir los z tales que $e^z = 1$.
   (c) Demostrar que si $e^z = e^w$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w + 2k\pi i$.
   (d) Probar que para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.

5. (a) Para $n = 2, 3, 4, 5$, dibujar todos los números complejos z tales que $z^n = 1$.
   (b) Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mostrar que hay n números complejos distintos tales que $z^n = \alpha$.

6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.
   (a) Hallar la imagen por f del conjunto $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$.
   (b) Hallar la imagen por f del primer cuadrante.
   (c) Mostrar que la imagen de la recta $\{t + it \mid t \in \mathbb{R}\}$ es una espiral.

7. Para $z \in \mathbb{C}$ se define,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

   (a) Demostrar que si $z \in \mathbb{R}$ entonces esto coincide con la definicion usual.
   (b) Demostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$ y $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$.
   (c) Demostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$ y $\operatorname{sen}(\overline{z}) = \overline{\operatorname{sen}(z)}$.
   (d) Demostrar que $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen período 2π y son funciones sobreyectivas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

8. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

   (a) $\cos z \in \mathbb{R}$ o $\operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$, (b) $\cos z = 0$ o $\operatorname{sen} z = 0$, (c) $\cos z = \frac{5}{4}$ o $\operatorname{sen} z = \frac{5}{4}$.

9. Probar que $|\cos(a + bi)| < |\cos(a + ci)|$ y $|\operatorname{sen}(a + bi)| < |\operatorname{sen}(a + ci)|$ si $|b| < |c|$.

10. Para $0 < \theta < 2\pi$, dar una fórmula para la suma $1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta$.
    Sugerencia: Recordar que $1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ para $z \neq 1$.

11. Demostrar que para todo par de números reales positivos a, b, vale que

$$\arctan\left(\frac{1}{a+b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a^2 + ab + 1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{a}\right).$$

Sucesiones

12. Si $|\alpha| < 1$, probar que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n\right) = \dfrac{1}{1-\alpha}$.

13. Calcular, en caso de que existan, los límites de las siguientes sucesiones:

    (a) $(1 + \frac{z}{n})^n$, (c) $\cos(n\pi) + \frac{i}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\right)$, (e) $n i^{2n+1}$,
    (b) $n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$, (d) $\left(\frac{(-1)^n+1}{3}\right)^n$, (f) $\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

14. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como el conjunto $\mathcal{M}$ de los números complejos c tales que la sucesión $z_0 = c, z_{n+1} = z_n^2 + c$, resulta acotada. Demostrar que $\mathcal{M} \subset \{|z| \leq 2\}$.

Plano Complejo ampliado - Esfera de Riemann

15. Sean $\mathbb{S}^2$ la esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio 1 y centro en $(0,0,0)$, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ el plano complejo ampliado y $N = (0,0,1)$ el polo norte de la esfera $\mathbb{S}^2$.

    Definimos la proyección estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ por $\pi(P) = a + ib$ donde $(a, b, 0)$ es el punto de intersección de la recta $\overline{NP}$ con el plano $x_3 = 0$ si $P \neq N$ y $\pi(N) = \infty$.

    (a) Probar que $\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq N$.
    (b) Probar que π es una biyección y su inversa φ está dada por $\varphi(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right)$.
    (c) Calcular $\varphi\big(\operatorname{Re}(z) = 0\big)$ y $\varphi\big(\operatorname{Im}(z) = 0\big)$.

16. Si $w, z \in \widehat{\mathbb{C}}$ definimos $\overline{d}(w,z) = d\big(\varphi(w), \varphi(z)\big)$ donde d es la distancia euclídea.

    (a) Verificar que $\overline{d}$ es una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$ que restringida a $\mathbb{C}$ es equivalente a la métrica usual.

    (b) Para $w, z \in \mathbb{C}$, verificar que $\overline{d}(w,z) = \frac{2|w-z|}{\sqrt{1+|w|^2}\sqrt{1+|z|^2}}$ y $\overline{d}(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$.

    (c) Probar que $(\widehat{\mathbb{C}}, \overline{d})$ es un espacio métrico compacto (y por lo tanto completo).

17. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia contenida en $\mathbb{S}^2$. Demostrar que si $\mathcal{C}$ no pasa por N entonces su proyección en $\mathbb{C}$ es una circunferencia y en caso contrario es una recta.

Homografías

Definición: Una *homografía* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ del tipo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $ad - bc \neq 0$.

18. Probar que el conjunto $\mathcal{H}$ de las homografías es un grupo bajo la composición.

19. Sean z_1, z_2, z_3 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Demostrar que existe una única homografía $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ y $T(z_3) = \infty$. Deducir que dados puntos distintos w_1, w_2, w_3 de $\widehat{\mathbb{C}}$ hay una única homografía que aplica z_1 en w_1, z_2 en w_2 y z_3 en w_3.

20. (a) Hallar la homografía que transforma los puntos $0, i, -i$ en $1, -1, 0$.

    (b) Probar que la imagen de la circunferencia de centro 0 y radio 1 por la homografía que transforma los puntos $0, i, -i$ en $0, 1, \infty$ es la recta $\{\mathrm{Re}(z) = 1\}$.

21. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \neq 1$, demostrar que la homografía

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{-\overline{\alpha} z + 1}$$

    transforma a la circunferencia $\{|z| = 1\}$ en si misma y a α en 0 ($|\alpha| \neq 1$).

22. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ no singulares que respresentan las homografías T_1 y T_2 respectivamente.

    (a) ¿Qué homografía representa la matriz AB?

    (b) ¿Qué homografía representa la matriz A^{-1}?

    (c) ¿Qué homografías representan las matrices diagonales?

    (d) ¿Cuando dos matrices distintas representan la misma homografía?

23. Probar que la homografía T aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y solo si existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Definición: Dados z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$, definimos la *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

24. (a) Si $T \in \mathcal{H}$ es tal que $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$ y $T(z_4) = \infty$ entonces $T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

    (b) Probar que para toda $T \in \mathcal{H}$ se tiene $\big(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

    (c) Probar que z_1, z_2, z_3, z_4 están en una recta o circunferencia si y solo si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Definición: Sea $\mathcal{C}$ una recta o circunferencia de $\widehat{\mathbb{C}}$ y z_2, z_3, z_4 puntos de $\mathcal{C}$. Dos puntos z y z^* se dicen *simétricos* respecto de $\mathcal{C}$ si $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z^*, z_2, z_3, z_4)$.

25. Probar que la definición anterior no depende de los punto elegidos z_2, z_3, z_4 sino de $\mathcal{C}$. En particular, demostrar que cada punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tiene un solo punto z^* simétrico respecto de $\mathcal{C}$.

    La funcion que a $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ lo manda a su simétrico se llama *simetría respecto de* $\mathcal{C}$.

26. Probar que

    (a) si $\mathcal{C}$ es una recta, esta nueva noción de simetría coincide con la usual.

    (b) el simétrico del centro de una circunferencia $\mathcal{C}$ (respecto a $\mathcal{C}$) es ∞.

    (c) si $T \in \mathcal{H}$ aplica $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\mathcal{C}$, la función $T \circ \overline{T^{-1}} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ es la simetría respecto de C.

    (d) si $T \in \mathcal{H}$ y los puntos z, z^* son simétricos respecto de una recta o circunferencia $\mathcal{C}$, entonces $S(z)$ y $S(z^*)$ son simétricos respecto de $S(\mathcal{C})$.

27. Dados tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 en $\widehat{\mathbb{C}}$, demostrar que existe una única recta o circunferencia que pasa por z_1 y hace que z_2 y z_3 sean simétricos.

28. Hallar homografías que transformen

    (a) la circunferencia $|z| = 2$ en $|z + 1| = 1$ y además -2 en 0 y 0 en i;

    (b) el semiplano superior $\text{Im}(z) > 0$ en $|z| < 1$ y α en 0 (donde $\text{Im}(\alpha) > 0$).

29. Sea $S(z) = \frac{7z+15}{-2z-4}$. Sea $z_1 = 1$ y $z_n = S(z_{n-1})$ para $n \geq 2$. Hallar $\lim_{n\to\infty} z_n$.

30. * Demostrar el porismo de Steiner: Sean dadas dos circunferencias disjuntas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Para cada circunferencia ω tangente a ambas definimos ω' como la unica circunferencia tangente a $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y a ω. Analogamente se define ω'' a partir de ω' y asi sucesivamente. Entonces se tiene que $\omega^{(n)} = \omega$ para toda circunferencia ω o para ninguna.

    Sugerencia: Considere una homografia que le permita suponer que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son concentricas.

31. * Demostrar el teorema de los numeros primos: Si $\pi(n)$ denota la cantidad de numeros primos entre 1 y n entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1.$$