ANALISIS ARMONICO - 2do. Cuatrimestre, 2012
Práctica 4 -Descomposiciones Atómicas, H^1, BMO, Wavelets

Ejercicio 1. *(Núcleo de Poisson en $\mathbb{R}^n$)*
Probar que
$$(e^{-2\pi|x|})\hat{} = c_n \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$
Para eso, deducir primero que
$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\beta^2/4u}\, du$$
usando las igualdades

- $e^{-\beta} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{1+x^2}\, dx$, $\beta > 0$ (aplicar residuos a $e^{i\beta z}/(1+z^2)$)
- $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\, du$

Ejercicio 2. Probar que si $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ es tal que $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 0$, entonces f y su transformada de Hilbert están en $L^1(\mathbb{R})$ (es decir, $f \in H^1(\mathbb{R})$).

Ejercicio 3. *(Interpolación con H^1)*
Sea $1 < p \leq \infty$ y sea T un operador subaditivo que manda $H^1(\mathbb{R}^n) + L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ en funciones medibles de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que para toda $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y para todo $\lambda > 0$ vale:
$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \lambda\}| \leq C\frac{\|f\|_{H^1}}{\lambda}$$
$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T(f)(x)| > \lambda\}|^{1/p_1} \leq C\frac{\|f\|_{p_1}}{\lambda}$$

- Sean $1 < q < p < p_1 < \infty$ y sea Q_j la familia de cubos maximales diádicos tales que $\lambda^q < |Q_j|^{-1}\int_{Q_j} |f|^q\, dx$. Notar que si $E_\lambda = \cup Q_j$, entonces $E_\lambda \subseteq \{(M(|f|^q))^{\frac{1}{q}} > \lambda\}$ y $|f| \leq \lambda$ c.t.p$(E_\lambda)^c$.
- Descomponer $f = g_\lambda + b_\lambda$, con
$$g_\lambda = f\chi_{(E_\lambda)^c} + \sum_j f_{Q_j}\chi_{Q_j}$$
$$b_\lambda = \sum_j b_\lambda^j, \qquad \text{donde } b_\lambda^j = (f - f_{Q_j})\chi_{Q_j}$$
- Probar que $g_\lambda \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que
$$\|g_\lambda\|_\infty \leq 2^{\frac{n}{q}}\lambda$$
$$\|g_\lambda\|_{p_1}^{p_1} \leq \int_{|f|\leq\lambda} |f(x)|^{p_1}\, dx + 2^{\frac{np_1}{q}}\lambda^{p_1}|E_\lambda| < \infty.$$

- Probar que para una constante $c = c(n, q)$ adecuada, $c\lambda^{-1}|Q_j|^{-1}b_\lambda^j$ es un $(1, q)$-átomo. Deducir que $b_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y que satisface

$$\|b_\lambda\|_{H^1} \leq C\lambda \sum_j |Q_j| \leq c\lambda|E_\lambda| < \infty$$

- Usando que

$$\|Tf\|_p^p \leq p\gamma^p \int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{T(g_\lambda) > \frac{1}{2}\gamma\lambda\}|\, d\lambda + p\gamma^p \int_0^\infty \lambda^{p-1}|\{T(b_\lambda) > \frac{1}{2}\gamma\lambda\}|\, d\lambda$$

  deducir que para cualquier $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 < p < p_1 < \infty)$, $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$
- Probar que si $p_1 = \infty$, $|T(g_\lambda)| \leq C2^{\frac{n}{q}}\lambda$, y deducir que el resultado anterior también vale eligiendo γ adecuadamente para que la integral que involucra a g_λ sea nula.

Ejercicio 4. Probar que $f \in BMO \Rightarrow |f| \in BMO$, pero la recíproca no es cierta.

Ejercicio 5. Probar que $log|x| \in BMO(\mathbb{R})$ pero $|log|x||^p \notin BMO(\mathbb{R})$ si $1 < p < \infty$.

Ejercicio 6. Probar que para $1 < p < \infty$ existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \|f\|_* \leq C_2 \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|^p\, dx\right)^{1/p}$$

Ejercicio 7. Sea $G = (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$, y sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una función admisible. Demostrar que la imagen de la transformada wavelet respecto a ψ es el subespacio de $L^2(G)$ dado por $\{F \in L^2(G) : \quad F(h) = \int_G F(g)K(h,g)dg\}$. Donde $K(a,b,a_0,b_0) = \frac{1}{C_\psi}\overline{(\mathcal{W}_\psi U(a,b)\psi)(a_0,b_0)}$, y $U(a,b)f = \frac{1}{\sqrt{|a|}} f(\frac{\cdot - b}{a})$, para $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una función admisible, y sea $\{a_n, b_n\}_n \subset G$ un conjunto numerable de manera que $g_n = U(a_n, b_n)\psi$ forme una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Demostrar que para cualquier $F \in L^2(G)$ que pertenece a la imagen de la transformada wavelet respecto a ψ, vale que

$$F(a,b) = \sum_n C_\psi F(a_n, b_n)(\mathcal{W}_\psi g_n)\,.$$

Ejercicio 9. Sean φ, ψ las funciones wavelet y de escala de un AMR, respectivamente, si ambas tienen soporte compacto, probar que si $f \in C(\mathbb{R})\bigcap L^2(\mathbb{R})$ entonces para todo x:

$$f(x) = \lim_{J\longrightarrow\infty} \sum_{j\leq J}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j\,k}\rangle \psi_{j\,k}(x)\,.$$

Ejercicio 10. Sean φ, $\psi \in C^s(\mathbb{R})$ las funciones wavelet y de escala de un AMR, respectivamente, si ambas tienen soporte compacto, probar que si f es acotada, entonces $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ $(\alpha \in (0,1)) \iff |\langle f, \psi_{j\,k}\rangle| \leq 2^{-j(\alpha+\frac{1}{2})}$ para $j > 0$ y $\alpha < s$.