ANALISIS ARMONICO - 2do. Cuatrimestre, 2012
Práctica 3 - Interpolación-Función Maximal- Transformada Hilbert

Ejercicio 1. Para $0 < \alpha < \infty$, $0 < \beta < 1$, probar que son equivalentes:

- Para todo conjunto $E \subset [0,1]$ medible, $\int_E |f(x)|^\alpha dx \leq c|E|^\beta$.
- $f \in weak - L^{\alpha/1-\beta}$.

Ejercicio 2. (Paley) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida finita, y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal de $L^2(X, \Sigma, \mu)$, tal que existe una constante $M > 0$ que verifica $|f_n(x)| \leq M$, para todo $x \in X$ y $n = 1, \dots$. Si $p \in [1, \infty)$, para $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, definimos $c_n(f) = \int_X f \overline{f}_n d\mu$. Probar que:

- Si $p \in (1, 2]$ y $f \in L^p(X)$, entonces existe una constante $C_p > 0$, tal que
$$\left(\sum_{n\geq 1} |c_n(f)|^p n^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p M^{\frac{2-p}{p}} \|f\|_{L^p(X)} \,.$$
- Si la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que para $q \in [2, \infty)$,
$$R_q = \left(\sum_{n\geq 1} |c_n|^q n^{q-2}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \,,$$
entonces existe $f \in L^q(X)$ tal que $c_n(f) = c_n$ y las sumas paciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ en $L^q(X)$ y además
$$\|f\|_{L^q(X)} \leq C_{\frac{q}{q-1}} M^{\frac{q-2}{q}} R_q \,.$$
Donde $C_{\frac{q}{q-1}}$ es la constante del primer item.

Sugerencia: Definir sobre $\mathbb{N}$, la medida $\nu(n) = \frac{1}{n^2}$ y considerar el operador $A : L^2(X) \longrightarrow L^2(\mathbb{N}, \nu)$ definido por $A(f) = \{nc_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$, e interpolar.

Ejercicio 3. Sea $a(t)$ una función no decreciente tal que $\int_{[1,s)} a(t)\frac{dt}{t} = O(b(s))$, y sea $A(t) = \int_{[0,t)} a(s)ds$, $B(t) = \int_{[0,t)} b(s)ds$. Si T es sublineal y simultaneamente de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo (fuerte) (∞, ∞) probar que
$$\int_{[0,1)} A(|Tf(x)|)dx \leq c + c\int_{[0,1)} B(|f(x)|)dx \,.$$

Ejercicio 4. Supongamos que tenemos defindo para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $T(f) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{K}\hat{f})$ con $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$, probar que si T es de tipo débil-$(1, 1)$ y de tipo $(2, 2)$, probar que T define un operador de tipo (p, p) con $p \in (1, \infty)$. (i.e. T es un operador acotado sobre L^p)
Sugerencia: Interpolar para $p \in (1, 2]$ y usar dualidad.

Ejercicio 5. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n), f \geq 0$, y sea $f = g + b$ la descomposición de Calderón-Zygmund a altura $\lambda > 0$. Probar que

- $\|g\|_p^p \leq (2^n\lambda)^{p-1}\|f\|_1$
- $\|b\|_1 \leq 2\|f\|_1$
- $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|b| \leq \frac{2}{|Q_j|}\int_{Q_j} f$

Ejercicio 6. *Descomposición de Calderón-Zygmund en L^q*

Sea $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq q < \infty$ y sea $\lambda > 0$. Probar que existen funciones $g, b \in \mathbb{R}^n$ tales que

- $f = g + b$
- $\|g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^q}$ y $\|g\|_{L^\infty} \leq 2^{n/q}\lambda$
- $b = \sum b_j$, donde cada b_j está soportada en un cubo Q_j y los cubos Q_j y Q_k tienen interiores disjuntos si $j \neq k$.
- $\|b_j\|_{L^q}^q \leq 2^{n+q}\lambda^q|Q_j|$
- $\int_{Q_j} b_j(x)dx = 0$
- $\sum_j |Q_j| \leq \lambda^{-q}\|f\|_{L^q}^q$
- $\|b\|_{L^q} \leq 2^{(n+q)/q}\|f\|_{L^q}$ y $\|b\|_{L^1} \leq 2^{(n+q)/q}\lambda^{1-q}\|f\|_{L^q}^q$

Ejercicio 7. Para $f \in L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$ y $\lambda > \|f\|_{L^1}$. Sea

$$b(x) = \sum_j \left(f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)dy\right)\mathbf{1}_{I_j}(x) = \sum_j b_j(x)$$

la función "mala" de la descomposición de Calderón -Zygmund de f y nivel λ. Demostrar que $\sum\limits_{j\leq N} b_j \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} b$, en L^p.

Ejercicio 8. Para $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \frac{1}{\alpha})$. Definimos:

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(x-t)}{|t|^{1-\alpha}}dt, \quad x \in \mathbb{T}\,.$$

Probar que $I_\alpha f \in L^q(\mathbb{T})$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ y que existe $c = c(\alpha, p, q)$ independiente de f tal que:

$$\|I_\alpha f\|_q \leq c\,\|f\|_p\ .$$

Ejercicio 9. Suponga que $f \in L^1(\mathbb{T})$ y que $\frac{1}{q} = 1 - \alpha$, probar que $I_\alpha f \in weak - L^q$ y que existe una constante c, independiente de f, de manera que para $\lambda > 0$:

$$|\{I_\alpha f > \lambda\}| \leq c(\|f\|_{L^1}/\lambda)^q\,,$$

y si $f \in L\,ln\,L(\mathbb{T})$, entonces $I_\alpha f \in L^q(\mathbb{T})$ y existen constantes A, B tales que:

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A + B\int_{\mathbb{T}} |f(x)|\ln^+|f(x)|dx\,.$$

Ejercicio 10. Probar que

$$H(\chi_{[a,b]})(x) = \frac{1}{\pi} \log \frac{|x-a|}{|x-b|}$$

Ejercicio 11. Probar que

$$H(e^{-x^2}) = \sqrt{\pi} e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Ejercicio 12. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $Hf \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\int f = 0$

Ejercicio 13. Sea T un operador acotado en $L^2(\mathbb{R})$ que satisface las siguientes propiedades:

- T conmuta con traslaciones.
- T conmuta con dilataciones positivas.
- T anticonmuta con la reflexión $f(x) \to f(-x)$.

Probar que entonces T es la transformada de Hilbert por una constante.

Ejercicio 14. *(Método de las rotaciones)*

Notación: si $x \in \mathbb{R}^n$, $x = |x|x'$ con $x' \in S^{n-1}$.

Sea $k(x) = \Omega(x')/|x|^n$, con Ω impar, homogéneo de grado cero y $\int_{S^{n-1}} |\Omega(x')|\, dx' < \infty$ y sea

$$K_\varepsilon f(x) = \int_{|y|>\varepsilon} f(x-y)k(y)\, dy.$$

- Probar que
$$K_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(y') \int_{|r|>\varepsilon} \frac{f(x-ry')}{r}\, dr\, dy \qquad (*)$$
- Observar que para cada y' fijo, todo $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir como $x = z + sy'$ con $s \in \mathbb{R}$ y z en el hiperplano ortogonal a y' que pasa por el origen, y que fijados z e y' la integral interior de $(*)$ es una transformada de Hilbert truncada.
- Usando lo anterior, deducir que K_ε es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, y existe $C = C(n,p)$ independiente de ε y f tal que $\|K_\varepsilon f\|_p \le C\|f\|_p$.