ANALISIS ARMONICO - 2do. Cuatrimestre, 2012
Práctica 1 - Series de Fourier

Ejercicio 1. Calcular la serie de Fourier de $f(x) = \chi_{(-h,h)}$, $-\pi < x < \pi$, donde $0 < h < \pi$.

Ejercicio 2. Mostrar que si $f, g \in L^2(\mathbb{T}), f(x) \sim \sum c_k e^{ikx}, g(x) \sim \sum d_k e^{ikx}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt \sim \sum c_k d_k e^{ikx}.$$

Ejercicio 3. Probar que si $f \sim \sum c_k e^{ikx} \in L^2(\mathbb{T})$ y $g \sim \sum d_k e^{ikx} \in L^2(\mathbb{T})$, entonces $h = fg \in L^1(\mathbb{T})$ y si $h \sim \sum C_n e^{inx}$, entonces

$$C_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k d_{n-k}$$

y la serie de la derecha converge absolutamente.

Ejercicio 4. Probar que si $f \sim \sum c_k e^{ikx} \in L^p$ y $g \sim \sum d_k e^{ikx} \in L^{p'}$, donde $1 < p < \infty, 1/p + 1/p' = 1$, entonces $h = fg \in L^1$ y sus coeficientes de Fourier son

$$C_n = (c * d)_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k d_{n-k} = \lim_{M\to+\infty} \sum_{k=-M}^{M} c_k d_{n-k}$$

donde a diferencia del ejercicio anterior la serie no necesariamente converge absolutamente y hay que considerar los límites de las sumas parciales simétricas.

Ejercicio 5. Probar que si f es continua en $[-\pi, \pi]$ y $\hat{f}(n) = 0$ para todo n, entonces $f \equiv 0$.

Ejercicio 6. Probar que si f es periódica y absolutamente continua, y $f \sim \sum c_k e^{ikx}$, entonces

$$f' \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k (ik) e^{ikx}.$$

Generalizar este resultado para más derivadas.

Ejercicio 7. Probar que si f es periódica, $f \sim \sum c_k e^{ikx}$, y si F es una primitiva de f, entonces $F - c_o x$ es periódica y

$$F(x) - c_0 x \sim C_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}$$

donde C_0 depende de la elección de la constante de integración de F.

Ejercicio 8. Sea f es periódica y absolutamente continua tal que su derivada está en L^2. Probar que entonces su serie de Fourier converge absolutamente.

Ejercicio 9. *Convergencia $\Rightarrow$ convergencia Cesaro $\Rightarrow$ convergencia Abel*

- Probar que si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ de números complejos converge a un límite finito s, entonces la serie converge en sentido Cesaro a s.
- Dar un ejemplo de una serie convergente en el sentido Cesaro que no sea convergente.
- Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge en el sentido Cesaro a σ, entonces converge en el sentido de Abel a σ. (Sugerencia: notar que basta suponer $\sigma = 0$ y ver que $\sum c_n r^n = (1-r)^2 \sum n\sigma_n r^n$, donde $\sigma_n = \frac{S_1+\cdots+S_n}{n}$).
- Dar un ejemplo de una serie convergente en el sentido de Abel que no sea convergente en el sentido Cesaro.

Ejercicio 10. *(Tauber)*

- Probar que si $\sum c_n$ converge en el sentido de Cesaro a σ y $c_n = o(1/n)$ (es decir, $nc_n \to 0$), entonces $\sum c_n$ converge a σ. (Sugerencia: $S_n - \sigma_n = [(n-1)c_n + \cdots + c_2]/n$).
- El item anterior sigue valiendo si se reemplaza la condición de convergencia Cesaro por convergencia Abel. (Sugerencia: estimar la diferencia entre $\sum_{n=1}^{N} c_n$ y $\sum_{n=1}^{N} c_n r^n$ con $r = 1 - 1/N$).

Ejercicio 11. *Existencia de funciones continuas tales que la serie de Fourier no converge en todo punto* (requiere conocimientos de análisis funcional)

- Probar que $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)|\, dz \to \infty$ para $n \to \infty$ (Sugerencia: considerar intervalos de longitud $\frac{2\pi}{3(2n+1)}$ alrededor de los puntos en los que $\frac{2n+1}{2} z = (k + \frac{1}{2})\pi$ para $k = 0, 1, \ldots, n$).
- Deducir que D_n no puede converger débilmente en el espacio de funciones continuas.
- Concluir que existe f continua para la cual no existe $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) f(x)\, dx$.

Ejercicio 12. *El álgebra $A(\mathbb{T})$.* Sea $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, y sea $f_k \in l^1(\mathbb{Z})$, entonces $F = f \sim \sum f_k e^{ikx}$ es una serie de Fourier absolutamente convergente y el espacio de tales series lo llamamos $A(\mathbb{T})$. Por definición, la norma de $F \in A(\mathbb{T})$ viene dada por $\|F\|_{A(\mathbb{T})} = \|f\|_{l^1}$.

- Si $F, G \in A(\mathbb{T})$ y además $f_n, g_n \in l^1(\mathbb{Z})$ son los coeficientes de Fourier de F y G respectivamente, probar que entonces, $f * g$ es la sucesión de coeficientes de Fourier de $FG \in A(\mathbb{T})$.
- Probar que $A(\mathbb{T})$ es un álgebra conmutativa con las operaciones de suma y producto ordinarias de funciones. La función $\chi_{\mathbb{T}}$ es la unidad (del producto) y para todas $F, G \in A(\mathbb{T})$ vale que $\|FG\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|F\|_{A(\mathbb{T})} \|G\|_{A(\mathbb{T})}$.

Ejercicio 13. *La desigualdad isoperimétrica*

El objetivo de este ejercicio es probar que entre todas las curvas cerradas simples del plano, el círculo es la que encierra mayor área. Supongamos entonces que tenemos una curva dada por $z(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $z(0) = z(2\pi)$ y que es biyectiva en $[0, 2\pi)$, y supongamos por simplicidad que tiene derivada continua.

- Supongamos que la curva está parametrizada por longitud de arco ($|z'(t)| = 1$ para todo t) y que tiene longitud 2π. Sabiendo que el área encerrada por la curva está dada por
$$A = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \bar{z}(t) z'(t)\, dt$$
probar que vale la igualdad
$$A = \pi \sum_{n \neq 0} n |\hat{z}(n)|^2$$
- Probar que para la longitud de la curva vale la igualdad
$$L = 2\pi = 2\pi \sum_{n \neq 0} n^2 |\hat{z}(n)|^2$$
- Deducir que $\pi - A \geq 0$ y la igualdad vale únicamente para el círculo de radio $|\hat{z}(1)|$.
- Deducir la siguiente versión de la desigualdad isoperimétrica: si z es una curva cerrada simple de longitud L que encierra área A y tiene derivada continua, entonces $4\pi A \leq L^2$ y la igualdad vale si y sólo si $z(t)$ es un círculo.

Adicionales

Ejercicio 14. *Cálculo de $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ vía los polinomios de Bernoulli*

Los polinomios de Bernoulli $\varphi_n(x), 0 \leq x \leq 2\pi$ se definen recursivamente por las relaciones
$$\varphi_0(x) = 1\,,\ \varphi_n'(x) = n\varphi_{n-1}(x)\,,\ \int_0^1 \varphi_n(x) = 0 \text{ para } n > 0$$

- Notar que para $n > 1$, $\varphi_n(0) = \varphi_n(1)$ y por lo tanto si llamamos ψ_n a la extensión periódica de φ_n, las ψ_n son funciones continuas (más aún, Lipschitz).
- Calcular ψ_1 y su serie de Fourier.
- Calcular la serie de Fourier de ψ_k.
- Probar que si definimos $b_k = \varphi_k(0)$, entonces $b_k = 0$ para todo k impar, $k \neq 1$.
- Usando la expresión de b_k para k par, deducir que $\zeta(2k)$ son múltiplos racionales de una potencia de 2π.

Ejercicio 15. *La fórmula de Wallis para $\pi/2$*

- Calcular la serie de Fourier de $f(x) = \cos \lambda x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, donde λ es un número real no entero.
- Probar que para $x = \pi$ y $|\lambda| < 1$, valen las fórmulas
$$\log\left(\frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda}\right) = \sum_{n=1} \log\left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right), \qquad \sin \pi\lambda = \pi\lambda \prod_{n=1} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right)$$
(Sugerencia: arreglar un poco la serie de Fourier del item anterior e integrar).
- Deducir que
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\ldots$$