ANALISIS ARMONICO - 2do. Cuatrimestre, 2012
Ejercicios para entregar-28/11

Ejercicio 1. Demostrar que si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es una función positiva, radial y decreciente, entonces,

$$\sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| \leq \|\phi\|_{L^1} \, Mf(x)\,.$$

Demostrar que si $\|\phi\| = 1$, y $f \in L^p$, $p \in [1, \infty)$, entonces $\phi_t * f \longrightarrow f$ c.t.p. cuando $t \longrightarrow 0$.

Ejercicio 2. Demostrar que el operador definido por

$$\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}^n} \longmapsto \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{a_k}{(|j-k|+1)^{n-\alpha}} \right\},$$

define un oprador acotado que mapea $l^s \longrightarrow l^t$, cuando $0 < \alpha < n$, $1 < s < t$ y $\frac{1}{s} - \frac{1}{t} = \frac{\alpha}{n}$.

Ejercicio 3. (Ejercicio 6 de la práctica 4.)

Ejercicio 4. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, si definimos $\psi_{j\,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$, demostrar que vale la igualdad $\|f\|^2_{L^2} = \sum_{j\,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j\,k} \rangle|^2$ para toda $f \in L^2 \iff$

$$\sum_j |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1 \;\; c.t.p.$$

y

$$\sum_{j \geq 0} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}}(2^j(\xi + q)) = 0 \;\; c.t.p.$$

para todo q entero impar.