ANALISIS ARMONICO - 2do. Cuatrimestre, 2012
Ejercicios para entregar-30/10

Ejercicio 1. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}) \bigcap C(\mathbb{R})$, $A = \{\xi \in \mathbb{R} : \hat{f}(\xi) \neq 0\}$, tales que $A \bigcap A + j = \oslash$ para todo $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. demostrar que $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_A)(x - k)$. Donde la convergencia es en $L^2(\mathbb{R})$ y uniforme. Probar además, que se cumple: $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)|^2$.

Ejercicio 2. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, demostrar que existe $0 < \sigma < \infty$ tal que $\hat{f}(\xi) = 0$ c.t.p. en $[-\sigma, \sigma]^c \iff f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$, $n = 0, 1, \ldots$ y $\lim\limits_{n \to \infty} \left\| f^{(n)} \right\|^{1/n}_{L^2} = \sigma_0 < \infty$. Donde $\sigma_0 = sup\{|\xi| \in sop(\hat{f})\}$.

Ejercicio 3. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ probar que existe una unica $u \in C^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ tal que $u_t = c \triangle u$, $u(0, .) = f$.
Sugerencia: considerar para $t \geq 0$, $\hat{u} = e^{-ct|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$.