

**ANALISIS ARMONICO - 2do. Cuatrimestre, 2012**  
**Ejercicios para entregar-20/9**

**Ejercicio 1.** (Kolmogorov) Sea  $T : L^p(\mathbb{T}) \rightarrow L^0(\mathbb{T})$  un operador sublineal, demostrar que  $T$  es  $(p, p)$ - débil (i.e.  $|\{|Tf| > \lambda\}| \leq \frac{K\|f\|_{L^p}^p}{\lambda^p}$ , con  $K$  independiente de  $f$ .)  $\iff$  para todo  $E \subseteq \mathbb{T}$  medible y  $r \in (0, p)$  se cumple que:

$$\int_E |Tf(x)|^r dx \leq c^r \frac{p}{p-r} |E|^{1-\frac{r}{p}} \|f\|_{L^p}^r$$

**Ejercicio 2.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $f \sim \sum_{k \geq 1} b_k \text{sen} kx$ . Demostrar que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (\pi - x) f(x) dx.$$

**Ejercicio 3.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Demostrar que  $\|f - S_n f\|_{L^2} \leq Cn^{-\alpha} \iff \|f(\cdot + h) - f\|_{L^2} \leq Kh^\alpha$ , para constantes apropiadas  $C, K > 0$ .