Análisis II - Análisis matemático II - Matemática 3
2do. cuatrimestre de 2012

Práctica 4 - Teoremas de Stokes y de Gauss. Campos conservativos. Aplicaciones.

1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $z \geq 0$, y el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$.

2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2; donde S_1 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2+y^2=1,\ 0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x,y,z) con $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, $z \geq 1$, orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera respectivamente. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (zx+z^2y+x, z^3yx+y, z^4x^2)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

3.
   a) Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S. Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

   $$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

   b) Deducir que si S es una superficie cerrada, entonces

   $$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

   (una superficie cerrada es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así , por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

   c) Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2+y^2+2z^2=10$, y $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$.

4. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ y la superficie S, en cada uno de los siguientes casos:

   a) $S =$ círculo de radio $a > 0$ centrado en el origen en el plano $z = 0$.

   b) $S =$ región del plano $z = 0$ entre $x^2+y^2=1$ y $x+y=1$.

5. Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

   a) $\mathbf{F} = (2xyz + \operatorname{sen} x, x^2z, x^2y)$, y C es la curva que está parametrizada por $(\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$.

   b) $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2, -2x^2y \operatorname{sen} xy^2, 0)$, y C es la curva parametrizada por $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \leq t \leq 0$.

6. Calcular

   $$\int_C \big(y + \operatorname{sen} x\big)\, dx + \Big(\frac{3}{2}z^2 + \cos y\Big)\, dy + 2x^3\, dz,$$

   donde C es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = \big(\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t\big)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   Sugerencia: Observar que C se encuentra en la superficie $z = 2xy$.

7. *a*) Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitacional $\mathbf{F} = -GmM\dfrac{\mathbf{X}}{||\mathbf{X}||^3}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$, cuando el punto de aplicación de $\mathbf{F}$ se desplaza de $(1,1,1)$ a $(2,2,2)$ a lo largo de

   1) el segmento que une los dos puntos
   2) una poligonal formada por aristas paralelas a los ejes del cubo del cual $(1,1,1)$ y $(2,2,2)$ son vértices opuestos diagonalmente.

   b) Comprobar que la integral curvilínea sólo depende de los puntos inicial y final. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$ y hallar una función potencial $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}$ para $\mathbf{F}$.

8. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales $\mathbf{F}$ en el plano es el gradiente de una función escalar f. Si existe dicha f, hallarla.

   a) $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$
   b) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$
   c) $\mathbf{F}(x,y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen} xy, x^2 \operatorname{sen} xy)$

9. Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en $\mathbb{R}^3$. Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B.

10. Calcular la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$

   y $\mathcal{C}$ es la curva que está contenida en la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y el plano de ecuación $y = x$ recorrida desde el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ al polo norte.

11. Rehacer el ejercicio 20) de la Práctica 2, usando el Teorema de Gauss.

12. Calcular $\int_S (x+y+z)\, dS$ donde S es el borde de la bola unitaria, es decir

$$S = \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

13. Analizar la aplicabilidad del Teorema de Gauss para el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ donde $\mathbf{r}$ es el vector que apunta de la posición de la masa m a la M, r es su longitud y G es la constante gravitatoria, considerando como región Ω la bola unitaria en $\mathbb{R}^3$.

14. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, siendo $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ y S la esfera de radio R con la normal que apunta hacia adentro.

15. Sea C la curva en el plano xz dada en polares por:

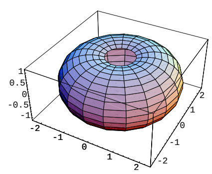
$$r(\varphi) = \frac{4\sqrt{3}}{9}(2 - \cos(2\varphi)) \quad \text{para } \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}$$

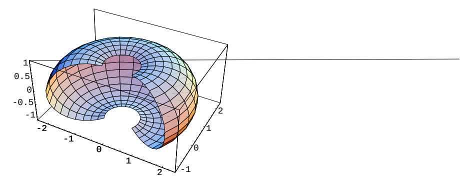
   (aquí φ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z). Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje z.

En el primer dibujo se muestra la superficie S, en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el **flujo** a través de S en el sentido "externo" del campo

$$F(x,y,z) = (x, y, -2z)$$





16. Calcular el flujo del campo $F(x,y,z) = (0,0,a^2 - x^2 - y^2)$ a través de las siguientes **secciones oblicuas** del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$:

    a) **Sección oblicua** determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $y + z = 1$, de modo que la normal en el punto $(0,0,1)$ apunte en la dirección $(0,1,1)$.

    b) **Sección oblicua** determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z = 0$, de modo que la normal en el punto $(0,0,0)$ apunte en la dirección $(0,0,1)$.

    ¿Depende el flujo del área de la sección?. **Justifique.**

17. Sea $\mathcal{S}$ la superficie dada por el gráfico de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ con $\|(x,y)\| \leq 1$ y sea $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{zx}{x^2+y^2}, \dfrac{zy}{x^2+y^2}, 0\right)$. Hallar

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

    Piense antes de actuar.

18. Se sabe que div $\mathbf{rot}\,\mathbf{G} = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{G} \in C^1$. Además, si $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es tal que div $\mathbf{F} = 0$ en $\mathbb{R}^3$, existe $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$. Por ejemplo, tomar

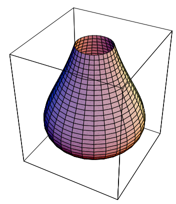
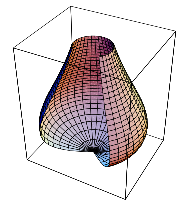
$$\begin{aligned}
G_1(x,y,z) &= \int_0^z F_2(x,y,t)\,dt - \int_0^y F_3(x,t,0)\,dt, \\
G_2(x,y,z) &= -\int_0^z F_1(x,y,t)\,dt, \\
G_3(x,y,z) &= 0.
\end{aligned}$$

    Considerar el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Verificar que div $\mathbf{F} = 0$. ¿Existe un campo $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$?

    Sugerencia: Ver Ejercicio 12.

19. Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2-2x}$ podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje z de la curva $x = f(z)$, $0 \leq z \leq 1$.

    Para una idea gráfica ver la figura.

    Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por
    $$F(x, y, z) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}\right)$$

    Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

20. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

    a) $\mathbf{F} = (x, y, z)$.

    b) $\mathbf{F} = (x^2 + 1, x - 2xy, y)$.

21. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \left\{(x, y, z) \, / \, x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \, , \, z \geq 0\right\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo
    $$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(xz - x\cos z, -yz + y\cos z, 4 - x^2 - y^2\right).$$

    Determinar R de modo que el flujo del campo **F** a través de S_R sea máximo.

22. Sea $\mathbf{V} = (x, y, xy - z)$ el campo de velocidades de un fluído. Decidir si el fluído se está expandiendo.

23. Calcular la cantidad de calor total que se pierde entre los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ a través de las paredes, el techo y el suelo de una habitación que ocupa la región $[0, 4] \times [0, 5] \times [0, 3]$ del espacio si la temperatura ambiente en el punto (x, y, z) en el instante t es $T = 30 - t - x^2 - y^2 - z^2$. (Suponemos que no hay fuentes ni pérdidas de calor dentro de la habitación y que la conductividad térmica del ambiente es 1).

    Sugerencia: Utilizar la Ley de Fourier que dice que el flujo por unidad de tiempo de la densidad de calor es $-K\nabla T$ donde K es la conductividad térmica. Aquí, ∇T es el gradiente en las variables espaciales.

24. Sea ρ la densidad de masa de un fluído que se mueve según un campo de velocidades **V**. Ver que la razón de variación en el tiempo de la densidad de masa ρ es $\rho_t = -\mathrm{div}\left(\rho\mathbf{V}\right)$.

25. Usando el teorema de Gauss, probar las *Identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f\Delta g + \nabla f\cdot\nabla g)\, dx\, dy\, dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, dx\, dy\, dz$$

Aquí $\mathbf{n}$ es la normal exterior al dominio $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, f, g son de clase $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ y, para una función $u\in C^2(\Omega)$, $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

26. Decimos que $\lambda\in\mathbb{R}$ es un autovalor del operador Δ del Ejercicio 22 en Ω si existe una función $f\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ con $f=0$ en $\partial\Omega$, $f\not\equiv 0$ tal que $\Delta f = \lambda f$ en Ω. En ese caso decimos que f es una autofunción asociada a λ.

    Utilizando las identidades de Green del Ejercicio 22, mostrar que si $\lambda\neq\mu$ son autovalores de Δ en Ω y f y g son autofunciones asociadas a λ y μ respectivamente se tiene

$$\iiint_{\Omega} f\, g\, dV = 0$$

27. Sea B una bola en $\mathbb{R}^3$. Ver que no puede haber una función $f\not\equiv 0$, $f\in C^2(B)\cap C^1(\overline{B})$ que satisfaga

$$\Delta f = 0 \quad \text{en } B, \qquad f = 0 \quad \text{en } \partial B.$$

    Sugerencia: Utilizar las identidades de Green del Ejercicio 22 para deducir que $\nabla f = 0$ en B. A continuación utilizar el Ejercicio 9 para deducir que f es constante.

28. Se sabe que la circulación de un campo eléctrico genera una variación en el flujo del campo magnético de modo que se tiene la relación

$$\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(\textit{Ley de Faraday})}$$

    donde c es una constante positiva, S es una superficie orientada cuyo borde es C y la circulación se da en el sentido de recorrido de C inducido por la normal elegida sobre S.

    Deducir que se tiene

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + c\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = 0.$$

    Sugerencia: Considerar un disco de radio ρ en un plano como superficie S. Aplicar el Teorema de Stokes, dividir por el área del disco, hacer ρ tender a 0 y posteriormente utilizar que el plano era arbitrario.