1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:
Libreta: Turno: 10 a 12:45 16:15 a 19

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012

Recuperatorio 2 - 2do Parcial (18/12/2012)

---

1. (a) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^t = -A$, con n impar. Calcular $\det(A)$.

   (b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^2 + \mathrm{Id}_n = 0$. Probar que entonces n es par. Dar un ejemplo de una tal A para $n = 2$, y luego para n par cualquiera.
   ¿Vale lo mismo si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$?

---

2. Encontrar la solución $(x(t), y(t), z(t))$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= 3\,x(t) + y(t) - 2\,z(t) \\ y'(t) &= 4\,y(t) - 2\,z(t) \\ z'(t) &= y(t) + z(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1,\ y(0) = 3,\ z(0) = 2$.

---

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que A es definida positiva (i.e. $x^t Ax > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$) si y solo si todos los autovalores de A son positivos.

---

4. Se considera $\mathbb{C}^{m\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$.

   (a) Sea $A = U\Sigma V^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ la descomposición en valores singulares de A, con valores singulares no nulos $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$. Probar que $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$.

   (b) Para $1 \leq k \leq r$, sea Σ_k la matriz diagonal igual a Σ pero donde se reemplazaron $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_r$ por 0, y sea $A_k = U\Sigma_k V^*$. Probar que $\mathrm{rg}(A_k) = k$ y que $\mathrm{dist}(A, A_k) = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \cdots + \sigma_r^2}$.
   (Comentario: A_k es la matriz de rango menor o igual a k que está a distancia mínima de A.)

---

5. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Probar que existe una matriz $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ no diagonalizable tal que $B^2 = A$ (no hace falta encontrar B explícitamente).

Justificar todas las respuestas