

1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA:

TURNO:

10 a 12:45

16:15 a 19

**Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012**  
**Recuperatorio 2 - 1er Parcial (18/12/2012)**

1. Sea  $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : 2a_{11} + a_{12} - 3a_{21} + 2a_{22} = 0 \right\}$  y  $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .  
 Determinar, si es posible, un endomorfismo  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2 \times 2})$  tal que

$$\text{Nu}(f) + \text{Im}(f) = H \quad \text{y} \quad \text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = S.$$

2. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea  $f \in \text{End}_K(V)$ . Probar que

$$\text{Nu}(f) = \text{Nu}(f^2) \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2).$$

¿Vale lo mismo si  $\dim_K(V) = \infty$ ?

(considerar por ejemplo  $V = K^{\mathbb{N}}$  y  $f \in \text{End}_K(K^{\mathbb{N}})$  dado por  $f((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$ ).

3. Sea  $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$  tal que

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ . Determinar para qué valores de  $a \in \mathbb{R}$  existe una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix},$$

y para alguno de los valores hallados, calcular la base  $\mathcal{B}$ .

4. Sea  $\varphi_i \in (\mathbb{R}^n)^*$  definido por  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^i x_j$ ,  $1 \leq i \leq n$ . (Así,  $\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$ ,  $\varphi_2(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2, \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ .) Probar que  $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  es base de  $(\mathbb{R}^n)^*$  y calcular la base  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$ .

5. En  $\mathbb{R}^{n \times n}$  con el producto interno  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$ , hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS