1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:
Libreta: Turno: 10 a 12:45 16:15 a 19

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Recuperatorio 1 - 2do Parcial (11/12/2012)

1. Sean c_n un vector columna y r_n un vector fila en K^n, Probar que $\det(\mathrm{Id}_n + c_n r_n) = 1 + r_n c_n$.
Sugerencia: Probar que
$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n + c_n r_n & -c_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ r_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ r_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & -c_n \\ 0 & 1 + r_n c_n \end{pmatrix} \in K^{(n+1)\times(n+1)}.$$

2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$, con f diagonalizable. Dado $\lambda \in K$, notemos $S_\lambda = \{v \in V \,:\, f(v) = \lambda v\}$.
   (a) Probar que: $f \circ g = g \circ f \;\Leftrightarrow g(S_\lambda) \subseteq S_\lambda, \forall\, \lambda \in K$.
   (b) Sea
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   Determinar la dimensión del espacio $C(A) = \{B \in \mathbb{R}^{4\times 4} \,:\, AB = BA\}$.

3. *SVD compacta*
   (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango r, y sea $A = U\Sigma V^t$ su descomposición en valores singulares. Sea $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ la submatriz de Σ formada por las r primeras filas y columnas de Σ, $U_r \in \mathbb{R}^{m\times r}$ y $V_r \in \mathbb{R}^{n\times r}$ la submatrices de U y V respectivamente formadas por sus r primeras columnas. Probar que $A = U_r \Sigma_r V_r^t$.
   (b) Aplicar para
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Determinar todas las transformaciomes ortogonales f en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(1,-1,0) = (1,-1,0)$ y $f(3,1,1) = (-1,-3,-1)$. Clasificar.

5. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   (a) Hallar la forma de Jordan y una base de Jordan para A.
   (b) Hallar subespacios $S_1, S_2, \ldots, S_6$ A-invariantes de $\mathbb{R}^7$ tales que $\dim(S_i) = i$ y $S_i \oplus S_{7-i} = \mathbb{R}^7$.

Justificar todas las respuestas