1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:
Libreta: Turno: 10 a 12:45 16:15 a 19

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Recuperatorio 1 - 1er Parcial (11/12/2012)

1. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y sea $f_\lambda : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ la función definida por
$$f_\lambda(h) := \lambda\, h - X\, h'.$$
   (a) Probar que f_λ es una transformación lineal y determinar para qué valores del parámetro λ se tiene que f_λ es un isomorfismo.
   (b) Para cada valor λ tal que f_λ no es un isomorfismo, determinar dimensión y base de $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

---

2. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ definido por $f(A) = (A + A^t)/2$, $\forall\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Demostrar que f es un proyector, determinar el núcleo y la imagen de f, y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que
$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & \mathbf{0}_{r,s} \\ \mathbf{0}_{s,r} & \mathbf{0}_s \end{pmatrix},$$
para $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ adecuados (aquí $\mathbf{0}_{r,s}$ denota la matriz nula en $\mathbb{R}^{r\times s}$, y análogamente para los otros casos).

---

3. Para $x_0 \in \mathbb{R}$ se define $D_{x_0} \in (\mathbb{R}_3[X])^*$ por $D_{x_0}(h) = h'(x_0)$, $\forall\, h \in \mathbb{R}_3[X]$.
Se considera el subespacio $T \subset (\mathbb{R}_3[X])^*$, $T := \langle D_{x_0} : x_0 \in \mathbb{R}\rangle$.
   (a) Determinar un subespacio $S \subset \mathbb{R}_3[X]$ tal que $S^\circ = T$
   (b) Determinar la dimensión y una base de T.

---

4. Se considera $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno canónico $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$, $\forall\, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (a) Sea $S = \langle \mathrm{Id}_n \rangle \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Determinar $p_S(A)$, la proyección ortogonal de A sobre S, $\forall\, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (b) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, y sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ dos bases de V. Sea $T := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Probar que
$$\mathrm{dist}([f]_{\mathcal{B}}, T) = \mathrm{dist}([f]_{\mathcal{B}'}, T).$$
(Sug: Observar que $T = S^\perp \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.)

---

5. Hallar la distancia entre la recta $L := \langle (1,2,3)\rangle + (0,2,1)$ y el plano Π paralelo a L que contiene a los puntos $P = (2,0,1)$ y $Q = (1,0,2)$.

Justificar todas las respuestas