1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:

LIBRETA: TURNO: 10 a 12:45 16:15 a 19

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012

2do Parcial (4/12/2012)

1. *La resultante de dos polinomios (Sylvester, 1853).*
Sean $f = x^2 + a_1x + a_0,\ g = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3) \in \mathbb{C}[x]$, con $\beta_i \neq \beta_j$ para $i \neq j$. Sean las matrices
$$S(f,g) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & 0 & 0 \\ \beta_1^3 & \beta_2^3 & \beta_3^3 & 1 & 0 \\ \beta_1^4 & \beta_2^4 & \beta_3^4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Probar que $\det\big(S(f,g)\big) = f(\beta_1)f(\beta_2)f(\beta_3)$. (Sugerencia: Multiplicar $S(f,g)$ por M y calcular el determinante de dos formas. ¿Dónde se usa que $\beta_i \neq \beta_j$ para $i \neq j$?)
Nota: $\det\big(S(f,g)\big)$ se llama la *resultante* de f y g: es un polinomio en los coeficientes de f y g que tiene la propiedad que es 0 si y solo si f y g tienen una raíz en común. La fórmula probada vale en el caso general y se llama fórmula de Poisson.

---

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de recurrencia definida por $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, con $a_{15} := 3^{16} - 1$ y $a_{16} := 3^{17} + 1$. Determinar a_0 y a_1.

---

3. *Descomposición polar de una matriz.*
   (a) Sea $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonal con coeficientes ≥ 0 en la diagonal, y sea $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que $P := CDC^t$ es simétrica y semi-definida positiva (i.e. $x^tPx \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$).
   (b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que A se puede descomponer en la forma $A = W\,P$ donde $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal y $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y semi-definida positiva. Esta se llama la descomposición polar de A.

---

4. Determinar, si es posible, una rotación f en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(S) = T$ para $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$ y $T = \langle(1,1,-1);(2,-1,1)\rangle\ \subset \mathbb{R}^3$.

---

5. (a) Hallar los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales la matriz A es nilpotente y su forma de Jordan está formada por exactamente 3 bloques.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (b) Para cada valor hallado, calcular la forma y una base de Jordan de A.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS