1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: TURNO: 10 a 12:45 16:15 a 19 **TEMA 2**

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
1er Parcial (13/10/2012)

---

1. Sean $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3} : \text{ cada una de las filas de } A \text{ suma } 0\}$ y $T = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3} : \text{ cada una de las columnas de } A \text{ suma } 0\}$.
   (a) Calcular $\dim(S \cap T)$ y $\dim(S + T)$.
   (b) Determinar un subespacio $U \subset \mathbb{R}^{2\times 3}$ tal que $\mathbb{R}^{2\times 3} = (S + T) \oplus U$.

---

2. Sean $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{R}^3$ los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales con bases $\mathcal{B} = \big((1, 1); (1 - 2i, 0); (i, 1); (0, i)\big)$ de $\mathbb{C}^2$ y $\mathcal{E}_3$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Para cada $a \in \mathbb{R}$, sea $g_a : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[g_a]_{\mathcal{B}\,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinar los valores de a para los cuales existe una t.l. $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^2$ tal que $g_a \circ f_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   (b) Para cada a hallado, determinar una tal f_a dando su expresión $f_a(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

---

3. Sea V un K-espacio vectorial, y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Probar que si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^2)$, y que si $V = \mathrm{Nu}(f) + \mathrm{Im}(f)$, entonces $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

---

4. *Un caso particular de la interpolación de Hermite.*
   Sean $\varphi_{00}, \varphi_{01}, \varphi_{10}, \varphi_{11}$ los funcionales lineales en $\mathbb{R}_3[X]^*$ definidos por

$$\varphi_{00}(P) = P(0),\ \varphi_{01}(P) = P'(0),\ \varphi_{10}(P) = P(1),\ \varphi_{11}(P) = P'(1),\ \forall P \in \mathbb{R}_3[X].$$

   (a) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathcal{B}^* = \big(\varphi_{00}, \varphi_{01}, \varphi_{10}, \varphi_{11}\big)$.
   (b) Probar que dados $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11} \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $P \in \mathbb{R}_3[X]$ que satisface las condiciones

$$P(0) = a_{00},\ P'(0) = a_{01}\,, P(1) = a_{10},\ P'(1) = a_{11}.$$

---

5. Sean $y = (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1)$, $z = (-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1) \in \mathbb{R}^{2n}$. Dado $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$, calcular su proyección ortogonal $p_S(x)$ al subespacio $S = \langle y, z\rangle$ (para el producto interno canónico), y deducir la siguiente desigualdad:

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i x_i\right)^2 \le 2n\left(\sum_{i=1}^{2n} x_i^2\right),\ \forall x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS