1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:
Libreta: Carrera: e-mail:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Final (9/4/2013)

1. Sean los endomorfimos $D, \int$ de $K[X]$ definidos en la base canónica de $K[X]$ por $D(1) = 0$, $\int 1 = X$, y $D(X^n) = nX^{n-1}$, $\int X^n = \frac{X^{n+1}}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calcular $D \circ \int$, y luego $D^m \circ \int^m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$.
   Deducir que $\int^m \circ D^m$ es un proyector, para todo $m \in \mathbb{N}$.
   (b) Para cada $m \in \mathbb{N}$, determinar $\mathrm{Nu}(\int^m \circ D^m)$ e $\mathrm{Im}(\int^m \circ D^m)$.

2. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que A tiene rango 1 si y solo si existen dos vectores columna x, $y \in K^n$ tales que $A = x\, y^t$.

3. Sea el $\mathbb{R}$- espacio vectorial $C([-1, 1]) = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : f$ es continua $\}$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$. Determinar el complemento ortogonal del subespacio de las funciones pares.

4. (a) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n, y sea $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ un conjunto linealmente independiente. Probar que si W es un subespacio de V de dimensión estrictamente mayor que $n - k$, entonces existe $w \in W$ no nulo tal que $w \in \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$.
   (b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Probar que si $v^tAv > 0$ para todo vector $v \neq 0$ en un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión m, entonces A tiene al menos m autovalores positivos (contando multiplicidad). (Sug: suponer que la cantidad k de autovalores positivos es menor que m y llegar a una contradicción.)

5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con todos sus autovalores iguales a 1. Probar que A es semejante a A^2.

Justificar todas las respuestas