1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:
Libreta: Carrera: e-mail:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012

Final (8/3/2013)

---

1. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $m \geq n$, de rango exactamente n. Probar que existe $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ de rango n también tal que $BA = \mathrm{Id}_n$.

---

2. Sea $(V, \langle\, , \,\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno, y sea $\{e_1, \dots, e_s\}$ un conjunto ortonormal de vectores de V.

   (a) Dado $v \in V$, sea $v_s = \sum_{i=1}^{s} \langle v, e_i\rangle e_i$. Calcular $\|v_s\|^2$, $\langle v_s, v\rangle$ y $\langle v, v_s\rangle$.

   (b) Calcular $\|v - v_s\|^2$ y probar la *Desigualdad de Bessel*: para todo $v \in V$,

$$\sum_{i=1}^{s} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

---

3. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que $\mathcal{X}_A(B) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es inversible si y solo si A y B no tienen autovalores en común.

---

4. Sea $(V, \langle\, , \,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y sean $f, g \in \mathrm{End}(V)$ dos transformaciones autoadjuntas.

   (a) Probar que si f y g conmutan, entonces, para todo autovalor λ de f, se tiene que:
   - el autoespacio $E_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ es g-invariante también,
   - $E_\lambda^\perp$ es f-invariante y g-invariante.

   (b) Probar que f y g conmutan si y sólo si existe una base ortonormal de V formada por autovectores comunes de f y g.

---

5. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Se dice que $f \in \mathrm{End}(V)$ es *idempotente* si $f^2 = \mathrm{id}_V$. Para V de dimensión finita, probar que f es idempotente si y solo si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[f]_\mathcal{B}$ es diagonal, con los elementos de la diagonal iguales a 1 o -1.

Justificar todas las respuestas