1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:
Libreta: Carrera: e-mail:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Final (25/6/2013)

---

1. *Producto de espacios vectoriales:*
   Sean V, W K-espacios vectoriales (no necesariamente de dimensión finita). Se define el producto cartesiano de V por W:
   $$V \times W = \{(v, w) : \, v \in V, \, w \in W\}.$$
   Este producto cartesiano resulta ser un K-espacio vectorial con las operaciones
   $$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2) \;\text{ y }\; k \cdot (v, w) = (k \cdot_V v, k \cdot_W w)$$
   (no hace falta probarlo).
   Exhibir una base de $V \times W$ en función de una base de V y una base de W (demostrar).
   ¿Cuál es la dimensión de $V \times W$ si V y W tienen dimensión finita?

---

2. (a) Sea $(u_1, \ldots, u_n)$ una base ortogonal de $\mathbb{R}_n$ y sea $U := (u_1 | \cdots | u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores (columna) $u_1, \ldots, u_n$. Probar que $|\det(U)| = \|u_1\| \cdots \|u_n\|$. (Sugerencia: calcular U^tU.)
   (b) Sea $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ y sea $(u_1, \ldots, u_n)$ la base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ que se obtiene aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$. Probar que para $1 \le i \le n$ se tiene $\|v_i\|^2 \ge \|u_i\|^2$, y que $\det(v_1 | \cdots | v_n) = \det(u_1 | \cdots | u_n)$.
   (c) *Desigualdad de Hadamard* (por el matemático francés Jacques Hadamard, 1865-1963):
   Probar que para todo $V := (v_1 | \cdots | v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ son vectores columna cualesquiera, se tiene
   $$\big|\det(V)\big| \le \|v_1\| \cdots \|v_n\|.$$

---

3. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matriz que tiene todos los coeficientes iguales a 1.
   (a) Probar que A es diagonalizable, y determinar D diagonal y P inversible tal que $D = P^{-1}AP$.
   (b) Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$. Probar que B es diagonalizable, y determinar D diagonal y P inversible tal que $D = P^{-1}BP$.

---

4. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

Justificar todas las respuestas