1	2	3	4	5

Apellido y Nombre:
Libreta: Carrera:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Final (22/2/2013)

---

1. *Producto de espacios vectoriales*
   Sean V, W K-espacios vectoriales. Se define

   $$V \times W = \{(v, w), \forall\, v \in V, \forall\, w \in W\}.$$

   Este conjunto resulta un K-espacio vectorial con las operaciones

   $$(v_1, x_1) + (v_2, w_2) = (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2) \text{ y } k(v, w) = (k \cdot_V v, k \cdot_W w).$$

   Exhibir una base de $V \times W$ en función de una base de V y una base de W (demostrar).
   ¿Cuál es la dimensión de $V \times W$ si V y W tienen dimensión finita?

---

2. Sean $A, B \in K^{n\times n}$.
   (a) Probar que $\mathrm{rg}(AB) \leq \min\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\}$.
   (b) Probar que si $A\,B = 0$, entonces $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \leq n$.
   (c) Probar que si $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) < n$, entonces existe un vector columna $x \in K^n$ que satisface $Ax = 0$ y $Bx = 0$.

---

3. Sean L_1, L_2 dos rectas en K^n, con $n \geq 2$. Probar que existe un plano Π que contiene a L_1 y L_2 si y solo si L_1 y L_2 no son alabeadas.

---

4. Sea $(V, \langle\, , \,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}(V)$. Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal, i.e. $f \circ f^* = f^* \circ f$.

---

5. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ para todo $1 \leq k \leq n$. Probar que A es nilpotente.

$\boxed{\text{Justificar todas las respuestas}}$