1	2	3	4	5

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA: CARRERA:

Algebra Lineal - 2do Cuatrimestre 2012
Final (1/3/2013)

---

1. Sea V un K-espacio vectorial, y sean S, T, R subespacios de V. Definir lo que significa que

$$V = S \oplus T \oplus R$$

en términos de bases de S, T y R y en términos de sumas e intersecciones de S, T y R, y probar la equivalencia de las dos formulaciones.

---

2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n.
   (a) Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ una base de V^* y sean $x_1, \dots, x_n \in K$. Probar que existe $v \in V$ tal que $\varphi_1(v) = x_1, \dots, \varphi_n(v) = x_n$.
   (b) Sean $\psi_1, \dots, \psi_n \in V^*$ no nulos. Probar que

$$\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \text{ es base de } V^* \iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nu}(\psi_i) = \{0\}.$$

   (Para la vuelta, se puede por ejemplo intentar probar que la matriz que se obtiene de escribir $\psi_1, \dots, \psi_n$ en función de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ es inversible, y justificar cuidadosamente todas las afirmaciones.)

---

3. Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Probar que $\mathrm{tr}(A^*A) = 0 \iff A^*A = 0$.

---

4. Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, y sea $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$.
   (a) Calcular el minimal de C en función del minimal de A y el minimal de B.
   (b) Probar que C se diagonaliza si y solo si A y B se diagonalizan.

---

5. Sea $X := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : \ \mathrm{rg}(A) = 1\}$. Determinar un representante para cada clase de equivalencia, para la relación de equivalencia "semejanza" en X.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS