

ALGEBRA LINEAL - 2do Cuatrimestre 2012

Práctica 9 - Transformaciones autoadjuntas

1. Calcular f^* para cada uno de los endomorfismos siguientes siguientes:
 - a) $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
 - b) $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$
 - c) $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, para $\mathcal{B} = ((1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1))$,
 - d) $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X])$ $f(p) = p'$, donde $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$.
 - e) $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n \times n})$, $f(A) = P^{-1}AP$ donde $P \in GL(n, \mathbb{C})$ y $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$.
2. Sea $h \in \mathbb{R}[X]$ y sea $\mu_h \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X])$ definido por $\mu_h(g) = hg, \forall g \in \mathbb{R}[X]$. Probar que existe, y calcular, μ_h^* para el producto interno $\langle g_1, g_2 \rangle = \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx$.
3. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión finita. Probar que:
 - a) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*, \forall f_1, f_2 \in \text{End}_K(V)$ y $(kf)^* = \bar{k}f^*, \forall f \in \text{End}_K(V), k \in \mathbb{C}$;
 - b) $(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*, \forall f_1, f_2 \in \text{End}_K(V)$;
 - c) $f \in \text{Aut}_K(V) \Rightarrow f^* \in \text{Aut}_K(V)$, y $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$;
 - d) $((f^*)^*)^* = f, \forall f \in \text{End}_K(V)$;
 - e) $f^* \circ f = 0 \Rightarrow f = 0, \forall f \in \text{End}_K(V)$.
4. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión finita y sea $f \in \text{End}(V)$. Probar que $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^{\perp}$ y $\text{Nu}(f^*) = (\text{Im}(f))^{\perp}$.
5.
 - a) Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definido por $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. Hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^3 que sean f -invariantes.
 - b) Sea $f_{\theta} \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ la rotación de ángulo θ . Probar que, para todo $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, f_{θ} no es diagonalizable y hallar todos los subespacios de \mathbb{R}^2 que sean f_{θ} -invariantes.
 - c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_{\theta} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_2)$ dado por

$$[g_{\theta}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

¿Es g_{θ} diagonalizable? Hallar todos los subespacios de \mathbb{C}^2 que sean g_{θ} -invariantes.

6. Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ una transformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.
 - a) Probar que para todo $i, 0 \leq i \leq n$, existe un subespacio S_i de \mathbb{R}^n de dimensión i que es f -invariante.
 - b) Probar que existe un hiperplano de \mathbb{R}^n que es f -invariante pero que no admite un complemento f -invariante.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 3y - 2z, 4x + 6y + 2z, -3x - 3y).$$

Hallar un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f sea autoadjunta para $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

8. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión finita y sea S un subespacio de V . Probar que la proyección ortogonal $p_S : V \rightarrow V$ sobre S es autoadjunta, y calcular sus autovalores.

9. a) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal tal que $U^t A U$ sea diagonal para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria tal que $U^* A U$ sea diagonal, para

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un e.v. con p.i. de dimensión finita y sea $f \in \text{End}(V)$. Se dice que f es *normal* si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

a) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.

b) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:

1) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$, $\forall v \in V$. En particular, $\text{Nu}(f) = \text{Nu}(f^*)$.

2) $\lambda \text{Id} - f$ es normal, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

3) $f(v) = \lambda v \Rightarrow f^*(v) = \bar{\lambda} v$.

4) $\text{Nu}(\lambda \text{Id} - f)$ es f^* -invariante.

c) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores.

(Sugerencia: observar que $(\text{Nu}(\lambda \text{Id} - f))^\perp$ es f -invariante y f^* -invariante).

d) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables sobre \mathbb{C} . Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable sobre \mathbb{R} .

11. Sea $A = U \Sigma V^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$ una descomposición en valores singulares de A . Probar que las columnas de U son una base ortonormal de autovectores de $A A^* \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

12. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

13. *Norma operador y condición de una matriz*

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. La siguiente definición

$$\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \right\}$$

(donde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$) define una norma en $\mathbb{R}^{m \times n}$, llamada *norma operador* (que no proviene en este caso de un producto interno). De hecho es fácil probar que aquí el supremo es un máximo, observando que $\|A\| := \sup \{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$. ¿Por qué?

También se define el *número de condición* (o la *condición*) de la matriz A con respecto a esa norma como

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

La condición de A mide el máximo error relativo que se puede cometer cuando se quiere resolver el sistema lineal $Ax = b$ pero en su lugar se resuelve $Ax' = b'$ donde b' es el resultado de haber hecho un error de medición al calcular b . Se tiene

$$\frac{\|x' - x\|}{\|x\|} \leq \text{Cond}(A) \frac{\|b' - b\|}{\|b\|}.$$

Sea $\text{rg}(A) = r > 0$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares de A con valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

- a) Probar que $\|A\| = \sigma_1$ y que $\text{Cond}(A) = \sigma_1/\sigma_r$.
- b) Para $0 \leq k < r$, sea $A_k = U\Sigma_k V^t$ donde $\Sigma_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz diagonal con valores $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ en la diagonal, y 0 en el resto. Probar que

$$\text{rg}(A_k) = k \quad \text{y} \quad \min\{\|B - A\| : \text{rg}(B) \leq k\} = \|A - A_k\| = \sigma_{k+1}.$$

14. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}.$$

Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\|Av\| \geq 15\|v\|$.

15. Hallar la matrices de rango 1 y 2 más cercanas, con la distancia en $\mathbb{R}^{n \times n}$ dada por la norma operador, a la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. *Inversa de Moore-Penrose y Cuadrados Mínimos*

Dada una matriz diagonal $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con elementos diagonales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, se define la *pseudoinversa* o *inversa de Moore-Penrose* de Σ como la matriz $\Sigma^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times m}$ que se obtiene invirtiendo los elementos no nulos de Σ y trasponiéndola,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \Rightarrow \quad \Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1/\sigma_r & \\ & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Sea $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se define la *pseudoinversa* o *inversa de Moore-Penrose* de A como la matriz $A^\dagger := V\Sigma^\dagger U^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

a) Calcular $A^\dagger A$ cuando $\text{rg}(A) = n$ y AA^\dagger cuando $\text{rg}(A) = m$.

b) *Cuadrados mínimos*

Sea $b \in \mathbb{R}^m$. El sistema $Ax = b$ puede no ser compatible. Se quiere hallar $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisfice

$$\|A\bar{x} - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|. \quad (1)$$

- Probar que si $\text{rg}(A) = n$, existe un único \bar{x} que satisfice (1), y es $\bar{x} = A^\dagger b$.
- Si $\text{rg}(A) < n$, entonces \bar{x} no es única. ¿Por qué? Probar que en ese caso, $\bar{x} = A^\dagger b$ es la única solución de (1) que pertenece a $N(A)^\perp$, y por lo tanto es la solución de norma mínima (i.e. $\|\bar{x}\| \leq \|x\|, \forall x$ solución de (1)).

17. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, simetría respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ y eje $\langle (1, 0, 1) \rangle$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

19. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

i) Probar que f es una rotación.

ii) Hallar $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

20. Una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se llama *isometría* si satisfice que

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2.$$

a) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.

b) Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación ortogonal y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + v, \forall x \in \mathbb{R}^2$.