ALGEBRA LINEAL - 2do Cuatrimestre 2012

Práctica 5 - Espacios vectoriales con producto interno

En lo que sigue, $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto interno canónico cuando no está especificado

1. Calcular la norma de cada uno de los vectores siguientes, y normalizarlos

   a) $u = (0, 1, 2)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = 3u$ y $z = u + v$

   b) $u = (i, 0, 0)$, $v = (1, 0, i)$

2. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos

   a) $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 1, -2)$

   b) $A = (i + 1, i, i)$, $B = (1, i, 0)$

3. *a)* Sean $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, -1, 1)$. Hallar $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$. ¿Es único?

   b) Sea $u = (1, -1)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$.

   c) Sea $u = (0, 0, 2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u\rangle = 0$.

   d) Sean $u = (1, 2)$, $v = (-1, 1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w\rangle = 1$ y $\langle v, w\rangle = 3$. Hallar w.

4. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no

   a) $v = (1, 1, 1), w = (1, 0, 1)$

   b) $v = (1, -2, 4), w = (-2, 1, 1)$

   c) $v = (1, i, 1), w = (i, 0, 1)$

   d) $v = (1, i, 1), w = (i, 1, 0)$

5. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores

   a) $v = (1, 1), w = (1, 0)$

   b) $v = (3, 2, -1), w = (0, 1, 2)$

6. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un e.v. con un producto interno arbitrario. Probar que:

   a) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$, $\forall\ u \in V$, entonces $v = w$.

   b) $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \iff \{u, v\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

   ¿Vale que si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ para algún $u \neq 0$, entonces $v = w$?

7. Determinar si los siguientes son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

   a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$

   b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$

   c) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K$, $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

   d) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} - x_1\overline{y_2} - x_2\overline{y_1}$

   e) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = 2x_1\overline{y_1} + (1 + i)x_1\overline{y_2} + (1 + i)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$

   f) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2}$

8. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$

$$\Phi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1 + b)x_3y_3$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

9. Calcular la matriz en la base canónica $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ del producto interno en $\mathbb{R}_n[X]$ dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

10. Probar que los siguientes definen productos internos:

    a) $\langle\,,\rangle : K^n \times K^n \to K$, $\langle x, y\rangle = \overline{y}^t Q^* Qx$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$, para $Q \in GL(n, K)$.

    b) $\langle\,,\rangle_T : V \times V \to K$, $\langle x, y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$ donde V y W son K-e.v., $\langle\,,\rangle$ es un p.i. sobre W y $T : V \to W$ es un monomorfismo.

11. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

    a) Probar que existe un único producto interno en V para el cual $\mathcal{B}$ resulta ortonormal.

    b) Hallarlo para $V = \mathbb{C}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, i), (-1, i)\}$, y para $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

12. Sea la recta $S = \langle(3, 4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

    a) El complemento ortogonal $S^\perp$ de S.

    b) $p(3, 4)$, $p(-4, 3)$ y $p(2, 1)$.

    c) El punto más cercano de la recta S a cada uno de los puntos $(3, 4)$, $(-4, 3)$ y $(2, 1)$. y la distancia de esos puntos a la recta S.

    d) Una fórmula explícita para $p(x_1, x_2)$ y la matriz $[p]_\mathcal{E}$ de p en la base canónica $\mathcal{E}$.

    e) Una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[p]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. *a*) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

    b) Calcular las coordenadas de $v = (1, 1, 1)$ y de $w = (1, 0, 0)$ en $\mathcal{B}'$.

    c) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano

    $$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

    y definir explicitamente la proyección ortogonal sobre ese plano.

    d) Calcular el punto de S más cercano a w, y la distancia que los separa. Idem para v.

14. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(0, i, 0); (1, 0, i); (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

15. Para los subespacios siguientes hallar el complemento ortogonal, y definir las proyecciones ortogonales sobre esos subespacios

    a) $\langle(1, 2, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

    b) $\{x \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

    c) $\langle(i, 1, 1), (-1, 0, i)\rangle \subseteq \mathbb{C}^3$

d) $\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\} \subseteq \mathbb{C}^4.$

16. Sea $S = \langle (1,1,0,-1), (-1,1,1,0), (2,-1,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar el punto de S más cercano a $(0,1,1,0)$, y la distancia de $(0,1,1,0)$ a S.

17. En $\mathbb{C}^{3\times 3}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A\,B^*)$, hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

18. En $\mathbb{R}_2[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\; dx$,

    a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1,\ X,\ X^2\}$.

    b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \langle 1 \rangle$.

    c) Hallar los polinomios constantes más cercanos a X y a X^2.

19. *a*) En $C[-1,1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\; dx$, hallar el polinomio de grado ≤ 2 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

    b) En $C[0,\pi]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{0}^{\pi} f(x)g(x)\; dx$,

    1) aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$.

    2) hallar el el elemento de $\langle 1, \cos x, \operatorname{sen} x\rangle$ más próximo a la función $f(x) = x$.

20. *a*) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\operatorname{Nu}(A) \perp \operatorname{Im}(A)$.

    b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermitiana (es decir $A^* = A$). Probar que $\operatorname{Nu}(A) \perp \operatorname{Im}(A)$.

21. <u>*La solución de longitud mínima de un sistema compatible*</u>

    Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que el sistema $Ax = b$ es compatible.

    a) Intuitivamente: hacer un dibujo en $\mathbb{R}^2$ representando $\operatorname{Nu}(A)$ como una recta y representar también el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$. Determinar quién debe ser la solución de longitud mínima (cómo debe ser con respecto a la recta $\operatorname{Nu}(A)$).

    b) Esta parte prueba que si existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \operatorname{Nu}(A)$, entonces $\overline{x}$ es la solución de longitud mínima, i.e. $\forall\, x$ solución, $x \neq \overline{x}$, se tiene $\|\overline{x}\| < \|x\|$: Usando que si $x \neq \overline{x}$, entonces existe $z \in \operatorname{Nu}(A)$ no nulo tal que $x = \overline{x} + z$ (justificar), calcular $\|x\|^2 = \langle \overline{x} + z, \overline{x} + z\rangle$ y concluir (recordar que $\overline{x} \perp \operatorname{Nu}(A)$).
    (Observar que esto implica en particular que si existe tal $\overline{x}$, entonces es único.)

    c) Este parte prueba que siempre existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ solución simultánea de $Ax = b$, $x \perp \operatorname{Nu}(A)$.

    1) Justificar que sin perdida de generalidad se puede suponer $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \leq n$ y $\operatorname{Rg}(A) = m$.

    2) Probar que el sistema que resulta de $Ax = 0, x \perp \operatorname{Nu}(A)$ es cuadrado y tiene como única solución el 0

    3) Concluir del item anterior que la matriz que describe el sistema $Ax = 0, x \perp \operatorname{Nu}(A)$ es inversible, y por lo tanto $\forall\, b \in \mathbb{R}^m$ el sistema $Ax = b, x \perp \operatorname{Nu}(A)$ tiene una única solución.

    d) Encontrar la solución de longitud mínima del sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$