

**ALGEBRA LINEAL - 2do Cuatrimestre 2012****Práctica 4 - Espacio dual**

1. Sea  $S \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$  el subespacio  $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* / \varphi(1, -1, 2) = 0\}$ . Hallar una base de  $S$ .
2. Hallar la base dual de la base  $\mathcal{B}$  del  $K$ -espacio vectorial  $V$  en cada uno de los casos siguientes:

a)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{B} = ((1, -1), (2, 0))$

b)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$

c)  $V = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $\mathcal{B} = (-X + 2, X - 1, X^2 - 3X + 2, X^3 - 3X^2 + 2X)$

3. Sea  $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  la base de  $(\mathbb{R}^3)^*$  definida por

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 \quad \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Hallar la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^*$ .

4. Sean  $f_1, f_2$  y  $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$  las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx \quad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x) dx$$

- a) Probar que  $\{f_1, f_2, f_3\}$  es una base de  $(\mathbb{R}_2[X])^*$ .
  - b) Hallar una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  tal que  $\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, f_3)$ .
5. Sea  $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$  definida por  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$  y sea  $\mathcal{E}^* = (x_1, x_2, x_3) \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$  la base dual de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .
    - a) Calcular las coordenadas de  $\varphi$  en  $\mathcal{E}^*$ .
    - b) Calcular las coordenadas de  $\varphi$  en la base  $\mathcal{B}' = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_1)$  de  $(\mathbb{R}^3)^*$ .
    - c) Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  el subespacio  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$  y sea  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  la base  $\mathcal{B} = ((0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0))$ . Encontrar una ecuación para  $S$  en la base  $\mathcal{B}$ . (Sugerencia: notar que  $\mathcal{B}'$  es la base dual de  $\mathcal{B}$  y no hacer ninguna cuenta.)

6. Sea  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$  la base  $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$ . Encontrar las coordenadas de la base dual de  $\mathcal{B}$  en la base dual de la canónica.

7. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$ .

a) Sea  $\varphi \in V^* - \{0\}$ . Probar que  $\dim(\text{Nu}(\varphi)) = n - 1$ .

b) Sean  $\varphi_1, \varphi_2 \in V^* - \{0\}$ . Probar que

$$\text{Nu}(\varphi_1) = \text{Nu}(\varphi_2) \iff \{\varphi_1, \varphi_2\} \text{ es linealmente dependiente.}$$

c) Sean  $\varphi_i, 1 \leq i \leq r$ , formas lineales en  $V^*$  y sea  $\varphi \in V^*$ . Probar que

$$\bigcap_{i=1}^r \text{Nu}(\varphi_i) \subseteq \text{Nu}(\varphi) \Rightarrow \varphi \in \langle \varphi_1, \dots, \varphi_r \rangle.$$

(Sug: empezar con el caso  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$  linealmente independiente.)

d) Sean  $\varphi_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) formas lineales en  $V^*$ . Probar que

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Nu}(\varphi_i) = \{0\} \iff \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ es base de } V^*.$$

8. Hallar una base de  $S^\circ \subseteq V^*$  en los siguientes casos:

a)  $V = \mathbb{R}^3$  y  $S = \langle (1, -1, 2), (2, 1, 3), (1, 5, 0) \rangle$

b)  $V = \mathbb{R}^4$  y  $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$

c)  $V = \mathbb{R}^3$  y  $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$

9. Sea  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y sea  $W = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / AB = 0\}$ . Sea  $f \in W^\circ$  tal que  $f(\text{Id}_2) = 0$  y  $f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ . Calcular  $f(B)$ .

10. Para los siguientes subespacios  $S$  y  $T$  de  $V$ , determinar una base de  $(S + T)^\circ$  y una base de  $(S \cap T)^\circ$ .

a)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S = \langle (1, 1, -1, 1), (2, -1, 3, 1) \rangle$ ,  $T = \langle (2, -4, 8, 0), (-1, 1, 2, 3) \rangle$

b)  $V = \mathbb{R}^4$ ,  $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) / \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ ,  $T = \langle (2, 1, 3, 1) \rangle$

11. Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y sean  $S$  y  $T$  subespacios tales que  $V = S \oplus T$ . Probar que  $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$ .

12. Sea  $\text{tr} : K^{n \times n} \rightarrow K$  la forma lineal traza, y sea  $A \in K^{n \times n}$ . Se define  $f_A : K^{n \times n} \rightarrow K$  como  $f_A(X) = \text{tr}(AX)$ .

a) Probar que  $f_A \in (K^{n \times n})^*$ ,  $\forall A \in K^{n \times n}$ .

b) Probar que si para todo  $X \in K^{n \times n}$  se tiene  $f_A(X) = 0$  entonces  $A = 0$ .

c) Se define  $\gamma : K^{n \times n} \rightarrow (K^{n \times n})^*$  como  $\gamma(A) = f_A$ . Probar que  $\gamma$  es un isomorfismo.

d) Sea  $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\varphi \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = 3x_{11} - 2x_{12} + 5x_{22}.$$

Encontrar una matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \gamma(A) = \varphi$ .

13. Sea  $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$  una  $(n + 1)$ -upla de puntos de  $K$  distintos. Para cada  $0 \leq i \leq n$  se define el funcional de evaluación en  $\alpha_i$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] &\rightarrow K \\ P &\mapsto P(\alpha_i). \end{aligned}$$

a) Probar que  $(\epsilon_{\alpha_i})_{0 \leq i \leq n}$  es una base de  $K_n[X]^*$ . Para eso, alcanza con probar que es la base dual de cierta base  $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$  de  $K_n[X]$ , llamada *base de Lagrange*.

- b) Probar que si  $(\beta_i)_{0 \leq i \leq n} \in K^{n+1}$ , entonces hay un único polinomio  $P \in K_n[X]$  que cumple  $P(\alpha_i) = \beta_i$  para  $0 \leq i \leq n$ . Se llama *polinomio interpolador* de los valores  $\beta_i$  en los puntos  $\alpha_i$ .

En términos de los polinomios de Lagrange, se tiene

$$P = \sum_{0 \leq i \leq n} P(\alpha_i) P_i.$$

- c) Si  $K = \mathbb{R}$ , probar que existe  $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que, para todo  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , vale la identidad

$$\int_0^1 P(x) dx = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i P(\alpha_i).$$

(Sugerencia: En particular, la identidad debe valer para los polinomios  $P_j$ .)

Hallar los  $a_i$  en el caso en que  $n = 3$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$  y  $\alpha_2 = 0$ .

14. Sean  $V$  y  $W$   $K$ -espacios vectoriales de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Se define la función  $f^t : W^* \rightarrow V^*$  de la siguiente manera:

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f, \quad \forall \varphi \in W^*.$$

$f^t$  se llama la función *transpuesta* de  $f$ .

- a) Verificar que efectivamente  $f^t(\varphi) \in V^*$  y probar que  $f^t$  es una transformación lineal.
- b) Probar que  $(\text{Im}(f))^\circ = \text{Nu}(f^t)$  y que  $\text{Im}(f^t) = (\text{Nu}(f))^\circ$  (Sug: probar que  $\text{Im}(f^t) \subseteq (\text{Nu}(f))^\circ$ ).
- c) Sean  $V = \mathbb{R}^2$  y  $W = \mathbb{R}^3$  y sea  $f(x, y) = (2x - y, 3x, x - 2y)$ .  
Si  $\mathcal{B} = ((1, 2), (1, 3))$  y  $\mathcal{C} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ , calcular  $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$  y  $[f^t]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*}$ .
- d) Si  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  son bases de  $V$  y  $W$  respectivamente, probar que

$$[f^t]_{\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*} = ([f]_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^t.$$

15. Sea  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial (o un  $K$ -espacio vectorial con  $K$  infinito).

- a) Sean  $v_1, \dots, v_n \in V$  vectores no nulos. Probar que existe una forma lineal  $\phi \in V^*$  tal que  $\phi(v_i) \neq 0$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .
- b) Sean  $\phi_1, \dots, \phi_n \in V^*$  formas lineales no nulas. Probar que existe un vector  $v \in V$  tal que  $\phi_i(v) \neq 0$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .
- c) Sean  $\phi_1, \dots, \phi_n \in V^*$  formas lineales no nulas y distintas entre sí. Probar que existe un vector  $v \in V$  tal que  $\phi_i(v) \neq 0$  para todo  $1 \leq i \leq n$  y además  $\phi_i(v) \neq \phi_j(v)$  para todo  $i \neq j$ .