ALGEBRA LINEAL - 2do Cuatrimestre 2012

Práctica 3 - Transformaciones lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\, 2x_2,\, 1 + x_1)$

   b) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

   c) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

   d) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

   e) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

2. Interpretar geométricamente las siguientes transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

   a) $f(x, y) = (x, 0)$

   b) $f(x, y) = (x, -y)$

   c) $f(x, y) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y \cos t)$, con $t \in \mathbb{R}$ fijo.

3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

   a) $\operatorname{tr} : K^{n\times n} \to K$, $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

   b) $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m}$, $f(A) = BA$ donde $B \in K^{r\times n}$ está dado

   c) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$

   d) $\Phi : C([0, 1]) \to C([0, 1])$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

   e) $\epsilon_\alpha : K[X] \to K$, $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$, donde $\alpha \in K$

4. Encontrar una aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que cumpla $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores v, $w \in \mathbb{C}$ pero que no sea una transformación lineal (sobre $\mathbb{C}$).

5. *a*) Mostrar que existe una t.l. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$, y que es única. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

   b) ¿Existe una t.l. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

   c) Sean f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

   $$\begin{array}{lll} f(1,0,1) = (1,2,1), & f(2,1,0) = (2,1,0), & f(-1,0,0) = (1,2,1), \\ g(1,1,1) = (1,1,0), & g(3,2,1) = (0,0,1), & g(2,2,-1) = (3,-1,2). \end{array}$$

   Determinar si $f = g$.

   d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

6. *a*) Probar que $\mathcal{B} = \{X^2 + X - 1, 2X + 3, X^2 - X - 1\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$ y determinar $f(aX^2 + bX + c)$ para $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ la t.l. definida por

   $$f(X^2 + X - 1) = (1, 2),\; f(2X + 3) = (-1, 1) \;\text{ y }\; f(X^2 - X - 1) = (2, 1).$$

b) Hallar todas las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ que satisfacen que

$$f(X^2 + X - 1) = (1, 2),\ f(2X + 3) = (-1, 1) \text{ y } f(X^2 - X - 4) = (2, 1).$$

7. *a*) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las transformaciones lineales de los ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

   b) Idem para tr y ϵ_α del Ejercicio 3.

8. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + x_3 - x_4).$$

   a) Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

   b) Determinar el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 6)\}$.

9. Sea $S = \langle(1, 1, 0, 1),(2, 1, 0, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

   a) Hallar una t.l. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$

   b) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $\langle(1, 1, 0, 1),(2, 1, 0, 1)\rangle + (0, 1, 1, 2)$

10. *a*) ¿Existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ epimorfismo? ¿Y un epimorfismo $f : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}_4[X]$?
    ¿Existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ monomorfismo?
    ¿Y un monomorfismo $f : \{A \in \mathbb{R}^{2\times2} : \mathrm{tr}(A) = 0\} \to \{f \in \mathbb{R}_3[X] : f(1) = f'(1) = 0\}$?

    b) ¿Existe alguna t.l. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{(1, 1, 0, 0),(1, 1, 1, 0),(1, 1, 1, 1)\} \subset \mathrm{Im}(f)$?

    c) ¿Existe algún automorfismo f de $\mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$, donde $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x_1 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$?

11. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que satisface $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f) = T$ en los siguientes casos:

    a) $S = \langle(1, 2, 1)\rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$,

    b) $S = \langle(1, -2, 1)\rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$.

12. En cada uno de los siguientes casos definir un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que satisface lo pedido

    a) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$

    b) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \langle(1, 1, 2)\rangle$

    c) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

    d) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

13. Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \text{ para cada } k \in \mathbb{R} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Determinar el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$, y decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

15. Sean $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ transformaciones lineales. Probar:

    a) $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$.
    b) Si $\mathrm{Nu}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(g \circ f)$.
    c) Si $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Nu}(g)$, entonces $g \circ f = 0$.
    d) $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.
    e) Si f es un epimorfismo, entonces $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$.

16. En cada uno de los siguientes casos definir un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que satisface lo pedido

    a) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$ *b*) $f \neq \mathrm{Id}$ y $f \circ f = \mathrm{Id}$

17. *a*) Para $t = \pi$ en el Ejercicio 2.c), calcular f^2
    b) Hallar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$, $f \neq \mathrm{Id}$, tal que $f^3 = \mathrm{Id}$
    c) Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A \neq \mathrm{Id}$, tal que $A^3 = \mathrm{Id}$ ¿Y en $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la t.l. definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

    y sean las bases (ordenadas) $\mathcal{B} = \big((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ y
    $\mathcal{B}' = \big((1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1)\big)$ de $\mathbb{R}^4$.

    a) Calcular $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$
    b) Calcular $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$
    c) Calcular matrices $Q \in GL(4, \mathbb{R})$ y $P \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q\,[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}\,P$ donde $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente. ¿Cuáles son?

19. Sean $\mathcal{B} = \big(v_1, v_2, v_3\big)$ y $\mathcal{B}' = \big(w_1, w_2, w_3, w_4\big)$ bases (ordenadas) de una $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la t.l. tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

    a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$?
    b) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.
    c) Describir el conjunto $\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = w_1 - 3w_3 - w_4\}$.

20. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

a) Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si A es la matriz de f en la base canónica,

1) ¿cuál es el rango de A?
2) encontrar matrices $Q, P \in GL(3,\mathbb{R})$ tales que

$$QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) ¿Existe una base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{R}^3$ para la cual $[f]_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

21. Decidir si las siguientes matrices A, B son equivalentes:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

22. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Determinar $P, Q, P', Q' \in GL(3,\mathbb{R})$ tales que

$$Q\,A\,P = Q'A'P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Determinar $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ y bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = A$ y $[f]_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = A'$.

23. Sean $\mathcal{E}$ la base canónica y $\mathcal{E}' = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ y $\mathcal{B}' = (w_1 + w_3, w_1 + 2w_2 + w_3, w_2 + w_3)$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [f]_{\mathcal{B}'\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar $\mathcal{E}'$.

24. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\mathrm{rg}(A\,B) \leq \mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A\,B) \leq \mathrm{rg}(B)$.

25. Dada $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

a) Calcular $[f]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \big((-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\big)$

b) Probar que f es un automorfismo (calcular $[f^{-1}]_{\mathcal{B}}$)

c) Exhibir una matriz $P \in GL(3,\mathbb{R})$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$. ¿Cuál es?

26. Sea V un K-espacio vectorial y sea $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ una base (ordenada) de V. Sea $f \in \text{End}(V)$ definido por $f(v_1) = v_1+v_2+v_3+v_4$, $f(v_2) = v_1+v_2+v_3$, $f(v_3) = v_1+v_2$, $f(v_4) = v_1$. Probar que f es un automorfismo, calcular $[f^{-1}]_{\mathcal{B}}$ y calcular $f^{-1}(v_1 - 2v_2 + v_4)$.

27. Para las siguientes $f :\in \text{End}(V)$, calcular $[f]_{\mathcal{E}}$, donde $\mathcal{E}$ es la base canónica

    a) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $\mathcal{E} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$
    b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{E} = (E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22})$
    c) $V = \mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2,\ x_1 + x_2)$, $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$

28. Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$. Probar que f es un proyector (i.e. $f \circ f = f$) y encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en la cual $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

29. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ que cumple lo pedido

    a) $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
    b) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$
    c) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle(-2, 1, 1)\rangle$

    y en caso que sea posible encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.

30. Sea V un K-espacio vectorial y sea $f \in \text{End}(V)$. Se dice que f es *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = 0$.

    a) Probar que si f es nilpotente, entonces f no es ni monomorfismo ni epimorfismo.
    b) Si $\dim(V) = n$, entonces f es nilpotente $\Leftrightarrow f^n = 0$
    (Sug: considerar las inclusiones $\text{Nu}(f^i) \subseteq \text{Nu}(f^{i+1})$ y probar que son estrictas)
    c) Sea $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V y sea f definida por

    $$f(v_1) = v_2, f(v_2) = v_3, \ldots, f(v_{n-1}) = v_n, f(v_n) = 0.$$

    Probar que f es nilpotente (con $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$) y calcular $[f]_{\mathcal{B}}$.
    d) Sea $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ dada por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$. Probar que $\mathcal{B} = \big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big)$ es una base de $\mathbb{R}^4$ y $f^4(e_1) = 0$. Calcular $[f]_{\mathcal{B}}$.
    e) Sea V de dimensión n, y sea $f \in \text{End}(V)$ tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz $[f]_{\mathcal{B}}$ es como en los incisos anteriores.

31. *a*) Sean $A, B \in K^{n\times n}$ matrices semejantes. Probar que $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.
    b) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B}$ una base (ordenada) de V. Se define $\text{tr} : \text{End}(V) \to K$ como la aplicación dada por $\text{tr}(f) = \text{tr}([f]_{\mathcal{B}})$. Probar que $\text{tr}(f)$ no depende de la base ordenada $\mathcal{B}$ elegida. ($\text{tr}(f)$ se llama la *traza* del endomorfismo f).
    c) Probar que $\text{tr} : \text{End}(V) \to K$ definida en el inciso *(b)* es una transformación lineal.