ALGEBRA LINEAL - 2do Cuatrimestre 2012

Práctica 10 - Forma de Jordan

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle_A := \langle v, Av, A^2v \rangle$? (es decir, ¿tiene A un vector cíclico?)

2. Sea $f \in \mathrm{End}_K(K^n)$ tal que f^2 tiene un vector cíclico (es decir, $K^n = \langle v \rangle_{f^2}$). Probar que f tiene un vector cíclico. ¿Es válida la recíproca?

3. Calcular el polinomio minimal y el polinomio característico de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

4. Calcular el polinomio minimal para cada una de los endomorfismos siguientes:

   a) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X]),\ f(h) = h' + 2\,h$

   b) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n\times n}),\ f(A) = A^t$

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

6. Sea $\delta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X])$ el endomorfismo derivación. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.

7. *Matriz Compañera*
   Sea $h(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in K[\lambda]$. La matriz compañera del polinomio h está definida como

$$\mathcal{C}_h = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}.$$

   El objetivo de este ejercicio es probar que $m_{\mathcal{C}_h}(\lambda) = \mathcal{X}_{\mathcal{C}_h}(\lambda) = h(\lambda)$.

   a) El objetivo de este inciso es probar que $m_{\mathcal{C}_h}(\lambda) = \mathcal{X}_{\mathcal{C}_h}(\lambda) = h(\lambda)$.
   Sea $f \in \mathrm{End}_K(K^n)$ definido por $f(x) = \mathcal{C}_h\, x$. Calcular m_{e_1}. Deducir $m_{\mathcal{C}_h}$ y $\mathcal{X}_{\mathcal{C}_h}$.

   b) Usar esto para dar otra demostración, inductiva, del teorema de Cayley-Hamilton.

8. Determinar la forma y una base de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. *a*) Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que $\mathcal{X}_A(t) = t^6$ y $m_A(t) = t^3$. Determinar las posibles formas de Jordan de A.
   b) Sea $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$. ¿Cuántos bloques tiene la forma de Jordan de A? ¿Y si $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ con $\mathrm{rg}(A) = 9$?

10. Decidir si existe (y en caso afirmativo exhibir)
    a) $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 5$, $\mathrm{rg}(A^2) = 3$, $\mathrm{rg}(A^3) = 2$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$.
    b) $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$, $\mathrm{rg}(A^2) = 4$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$.
    c) $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 9$, $\mathrm{rg}(A^2) = 5$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$.

11. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

12. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&-1&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \\ -1&0&-1&0&0&1&0 \\ -1&-1&-1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&-1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

13. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \leq j \\ 1 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

14. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que $m_A(\lambda) = \lambda^6$, y sea $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

15. Sea $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de $\mathbb{C}^7$ tal que

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0&0 \\ 1&2&0&0&0&0&0 \\ 0&1&2&0&0&0&0 \\ 0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&1&2&0&0 \\ 0&0&0&0&0&3&0 \\ 0&0&0&0&0&0&3 \end{pmatrix}.$$

    a) Hallar $\mathcal{X}_f$ y m_f.
    b) Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ un autovalor de f y sea $m = \mathrm{mult}(\lambda_0, \mathcal{X}_f)$. ¿Para qué autovalores λ_0 de f se tiene que $\mathrm{Nu}(\lambda_0 \,\mathrm{Id} - f) = \mathrm{Nu}\left((\lambda_0 \,\mathrm{Id} - f)^m\right)$?

c) Para cada autovalor λ_0 de f, ¿cuál es la menor potencia k tal que $\mathrm{Nu}\left((\lambda_0 \mathrm{Id} - f)^m\right) = \mathrm{Nu}\left((\lambda_0 \mathrm{Id} - f)^k\right)$?

d) Para cada λ_0 autovalor de f, notamos por f_{λ_0} la restricción de $\lambda_0 \mathrm{Id} - f$ a $\mathrm{Nu}\left(\lambda_0 \mathrm{Id} - f)^m\right)$. Calcular $\dim(\mathrm{Im}(f_{\lambda_0}))$ y $\dim(\mathrm{Im}(f^2_{\lambda_0}))$.

16. Hallar la forma y una base de Jordan de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz siguiente para cada valor de $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, x\,e^x, x^2 e^x, e^{2x}\rangle$. Sea $\delta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ definido por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ.

19. Determinar las posibles formas de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en los casos:

a) $\mathcal{X}_A(\lambda) = (\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$ y $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$

b) $\mathcal{X}_A(\lambda) = (\lambda-7)^5$ y $m_A(\lambda) = (\lambda-7)^2$

c) $\mathcal{X}_A(\lambda) = (\lambda-2)^7$ y $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^3$

d) $\mathcal{X}_A(\lambda) = (\lambda-3)^4(\lambda-5)^4$ y $m_A(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-5)^2$

20. Determinar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ que cumple

$$m_A = (\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)^2(\lambda-\lambda_4)^3, \quad \text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j,$$

$$\mathrm{rg}(A-\lambda_1 \mathrm{Id}) = 11,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_1 \mathrm{Id})^2 = 10,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 \mathrm{Id}) = 12,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 \mathrm{Id})^2 = 10, \mathrm{rg}(A-\lambda_4 \mathrm{Id}) = 13.$$

21. Determinar la forma de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 distintos tal que:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{rg}(A-\lambda_1 \mathrm{Id}) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 \mathrm{Id})^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 \mathrm{Id})^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1 \mathrm{Id})^4 = 10 \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_2 \mathrm{Id}) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 \mathrm{Id})^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 \mathrm{Id})^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2 \mathrm{Id})^4 = 9, \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 \mathrm{Id}) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3 \mathrm{Id})^2 = 12, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3 \mathrm{Id})^3 = 11. & \end{array}$$

22. Decidir si las matrices siguientes son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

23. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A(\lambda) = \mathcal{X}_B(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-3)^2$ y $m_A = m_B$. ¿Implica esto que A es semejante a B?

24. Sean x, $y \in \mathbb{C}^n$ no nulos, y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = x_i y_j$.

   a) Calcular todos los autovalores y autovectores de A.

   b) Calcular las posibles formas de Jordan de A.

25. *a*) Sea J la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Probar que J es semejante a J^t.

   b) Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ tal que $B^2 = A$.

27. Calcular para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

28. Hallar una fórmula general para el término general a_n de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por:

$$a_0 = \alpha,\ a_1 = \beta\ ,\ a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \text{donde}\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

29. *a*) Calcular e^{At} para las matrices A siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   b) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) & = & 3x(t) - y(t) \\ y'(t) & = & x(t) + y(t) \end{cases}$$

   con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

   c) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) & = & 3x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) + y(t) \\ z'(t) & = & -x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

   con condiciones iniciales arbitrarias $x(0) = a$, $y(0) = b$, $z(0) = c$.