

ALGEBRA LINEAL - 2do Cuatrimestre 2012**Práctica 1 - Matrices, sistemas de ecuaciones lineales, matrices elementales**

(En todas las prácticas, K es un cuerpo; en general $K = \mathbb{Q}$ (los números racionales), \mathbb{R} (los números reales) o \mathbb{C} (los números complejos))

1. Cuando sea posible, calcular $A + 2B$, $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$b) A = (1 \ 2 \ 3), B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Exhibir matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \neq 0$, tales que $A^2 = -\text{Id}_2$ y $B^2 = 0$.

3. Sean A, B y $C \in K^{n \times n}$ con $n \geq 2$. Mostrar un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

$$a) (AB)^2 = A^2 B^2,$$

$$e) A^2 = A \Rightarrow A = 0 \text{ ó } A = \text{Id}_n,$$

$$b) AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0,$$

$$f) A^j = 0 \text{ para algún } j \geq 2 \Rightarrow A = 0,$$

$$c) AB = AC \text{ y } A \neq 0 \Rightarrow B = C,$$

$$g) (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$d) AB = 0 \Rightarrow BA = 0,$$

$$h) A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

4. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre $A, B \in K^{n \times n}$ para que valga la igualdad en el ejercicio 3, incisos $g)$ y $h)$.

5. Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B , AB tiene una fila de ceros? (siempre que AB esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

6. Sea $A \in K^{m \times n}$ y sea $e_i \in K^n$ el vector columna que tiene un 1 en el lugar i y 0 en los otros lugares. Calcular $A e_i$.

7. Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{3 \times 3} / AB = BA, \forall B \in K^{3 \times 3}\}$.

8. Sean $A, B \in K^{n \times n}$.

a) Probar que si A y B son triangulares superiores, entonces AB es triangular superior.

b) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), entonces $A^n = 0$.

9. a) Sean $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times p}$. Probar que $(AB)^t = B^t A^t$.

b) Sean $A, B \in K^{n \times n}$. Probar que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ (a+1)x_2 + x_3 = 0 \\ (a^2 - 4)x_3 = 0 \end{cases} & c) \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \end{cases} \\
 b) \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 = 0 \end{cases} & d) \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 = -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 = b \end{cases}
 \end{array}$$

21. Sea $A \in K^{n \times n}$ y sea $b \in K^n$. Probar que $Ax = b$ tiene una única solución si y solo si la matriz escalón reducida correspondiente a A es la matriz identidad. Deducir que $Ax = b$ tiene una única solución si y solo si A es invertible. (En cuyo caso esa única solución es $x = A^{-1}b$.)
22. Decidir si (o cuándo) las siguientes matrices son invertibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas. Escribir las que sean invertibles como producto de matrices elementales.

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & e) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 b) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & d) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & f) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
 \end{array}$$