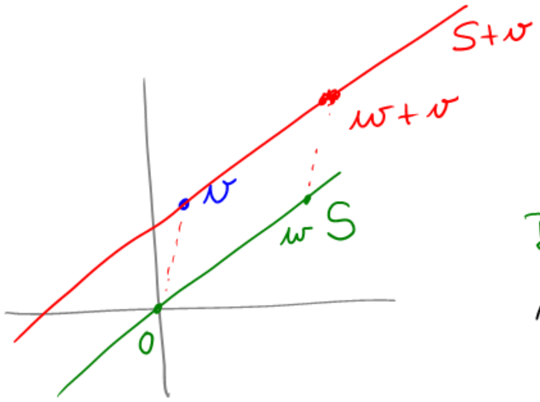
Variedades lineales



$$S+v := \{w+v,\ w\in S\}$$

Definición: Sea V un K-e.v.

Una variedad lineal en V es un cjto de la forma $S+v$ donde S es un subespacio de V y $v\in V$

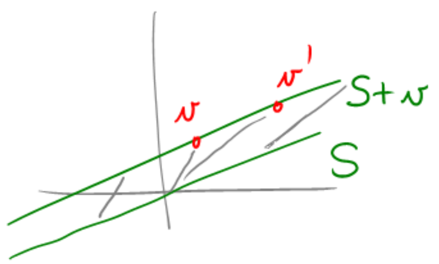
(subespacio corrido o trasladado al vector v de V)

(Es como darle a V otra estructura de K-e.v donde el nuevo origen es el vector v: las variedades lineales que pasan por v son los subespacios en esta nueva estructura de e.v)

Observación: ⓪ $M=S+v$ es variedad lineal $\Rightarrow$ $w-w'\in S,\ \forall w,w'\in M$

① v no es único para determinar la variedad $M=S+v$:

Se tiene $M=S+v',\ \forall v'\in M$



Pues si $v'\in M=S+v$, entonces $v'-v\in S$

luego $\forall\ w+v'\in S+v'$, se tiene

$$w+v' = \underbrace{w+(v'-v)}_{\in S} + v \in S+v = M$$

Es decir $S+v'\subseteq M$. Recíprocamente $M\subseteq S+v'$:

$\forall\ w+v\in M$, se tiene $w+v = w+(v-v')+v'\in S+v'$.

② Pero S sí es único: $S'+v' = S+v \iff S'=S$ y $v'-v\in S$

(Subespacio asociado a la variedad)

($\Leftarrow$) Por ①

($\Rightarrow$) $S'+v' = S+v \Rightarrow v'-v\in S$ (pues $v',v\in M$)

$S'\subseteq S$: $w'\in S' \Rightarrow w'+v'\in S'+v' = S+v \Rightarrow w'+v' = w+v$ con

$w\in S \Rightarrow w' = \underbrace{w}_{\in S} + \underbrace{v-v'}_{\in S} \Rightarrow w'\in S$. Análogamente $S\subseteq S'$. ⊠

Esto permite hablar de dimensión de una variedad lineal

Definición (dimensión de variedad)

Sea V un K-e.v y sea $M=S+v$, con S subespacio de V y $v\in V$, una variedad lineal en V. Se define $\dim_K(M) = \dim_K(S)$,

Ejemplos de variedades lineales

1. Subespacios de V,
2. Puntos, rectas, planos, ..., hiperplanos en V
   dim 0, dim 1, dim 2, dim $n-1$ si $\dim(V)=n$
3. Dado $\varphi \in V^* - \{0\}$, y $\beta \in K$, $\overbrace{\{v \in V : \varphi(v) = \beta\}}^{M}$ es variedad

pues $M_0 = \{v \in V : \varphi(v) = 0\}$ es subespacio y si $\varphi \neq 0$, $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 1$
$\Rightarrow \beta \in \operatorname{Im}(\varphi)$: $\exists \bar{v} \in V / \varphi(\bar{v}) = \beta$ (solución particular)
Se tiene $M = M_0 + \langle \bar{v} \rangle$.

Así : $\{P \in K_n[x] / P(\alpha) = \beta\}$ es variedad : $(Ev_\alpha(P) = \beta)$ etc...

4. Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales : Dados $A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$
$S_b = \{x \in K^n : Ax = b\} = S_0 + \bar{x}$ donde $S_0 = \{x \in K^n : Ax = 0\}$
$\bar{x} = $ sol. particular
es variedad lineal en K^n (cuando el sistema es compatible)
De hecho éstas son todas las variedades lineales de K^n: $\forall S$ subespacio de K^n, $\exists A \in K^{n\times n}$ tq $S = N(A) = \{x \in K^n : Ax = 0\}$
luego la variedad lineal $M = S + \bar{x} = \{x + \bar{x} : Ax = 0\} =$
$= \{y \in K^n : Ay = \underbrace{A\bar{x}}_{b}\}$

5. Vía coordenadas, esto describe todas las variedades lineales de un K-e.v. V de dim. n : Sea $\mathcal{B}$ una base de V y sea $M = S + v$ una variedad lineal en V. Entonces

$$w \in M \iff [w]_{\mathcal{B}} \in S_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$$

donde $S_{\mathcal{B}}$ nota $\phi(S)$ vía el isomorfismo "tomar coordenadas"

Observación : Sabemos que 2 ptos determinan una recta si son distintos (o un pto si son =), 3 ptos no alineados determinan un plano, si están alineados puede ser una recta o un pto. En general dados $v_0, .., v_m \in V$ K-e.v. existe la **variedad lineal generada por $v_0, .., v_m$** : la "menor" variedad lineal en V que contiene a los vectores $v_0, .., v_m$ (c/r a la inclusión)

Proposición: Sea V un K-e.v y sean $v_0, \ldots, v_m \in V$. Entonces la variedad lineal generada por $v_0, \ldots, v_m$ es

$$M = \langle v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0 \rangle + v_0$$

(En particular $\dim_K(M) \leq m$)

Demostración: Claramente $v_i \in \langle v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0 \rangle + v_0$, $0 \leq i \leq m$

luego $M \subseteq \langle v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0 \rangle + v_0$.

Por otro lado si $M' = S + v$ contiene a $v_0, \ldots, v_m$, se tiene

$v_i - v_0 \in S$, $1 \leq i \leq m$ $\Rightarrow$ $\langle v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0 \rangle \subseteq S$

Además $v_0 \in M'$ $\Rightarrow$ $\langle v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0 \rangle + v_0 \subseteq M'$. ☒

Intersección y suma de variedades lineales

Proposición (intersección de variedades lineales)

Sea V un K-e.v y M, N variedades lineales en V.

Entonces, si $M \cap N \neq \emptyset$, $M \cap N$ es una variedad lineal. En ese caso,

si $M = S + v$ y $N = T + w$, ent. $M \cap N = (S \cap T) + u$, $\forall u \in M \cap N$

Demostración:

Si $u \in M \cap N$, ent $M = S + u$, $N = T + u$. Luego

($\subseteq$) $v \in M \cap N \iff v = w_1 + u$ con $w_1 \in S$ y $v = w_2 + u$ con $w_2 \in T$

$\Rightarrow w_1 = w_2 \in S \cap T \Rightarrow v \in S \cap T + u$

($\supseteq$) es aún más directo

Definición (suma de variedades lineales)

Sea V un K-e.v y sean M, N variedades lineales en V.

La **suma** de M y N ($M \vee N$) es la menor variedad lineal que contiene tanto a M como a N (c/r a la inclusión)

Proposición (suma de variedades lineales)

Sean M, N variedades lineales en el K-e.v V. Entonces

① Si $M \cap N \neq \emptyset$, y $M = S + u$, $N = T + u$ ent $M \vee N = (S + T) + u$

② En cualquier caso: si $M = S + v$, $N = T + w$, entonces

$$M \vee N = (S + T + \langle v - w \rangle) + w$$

Demostración

① Está claro que $M, N \subseteq S+T+u$

Por otro lado si $M, N \subseteq P$ para alguna variedad $P = R + u'$, entonces $P = R + u$ (pues $u \in P$) y $S+T \subseteq R$ pues

$S = M - u \subseteq P - u = R$ y $T = N - u \subseteq P - u = R$

Luego $S+T+u \subseteq P$. Así $M \vee N = S+T+u$

② Está claro que $M, N \subseteq (S+T+\langle v-w\rangle)+w$

pues $M = S+v \subseteq S+\langle v-w\rangle+w$ y $N = T+w$.

Por otro lado, si $M, N \subseteq P = R+u'$, ent. $P = R+v = R+w$ (pues $v, w \in P$)

y esto implica como arriba que $S = M - v \subseteq R$ y $T = N - w \subseteq R$

Pero más aún, $v - w \in R$ pues $v, w \in P \Rightarrow \langle v-w\rangle \subseteq R$.

Así $S+T+\langle v-w\rangle \subseteq R$, i.e. $(S+T+\langle v-w\rangle)+w \subseteq P$

Por lo tanto $M \vee N = S+T+\langle v-w\rangle+w$ ☒

La presentación de $M \vee N$ obviamente no depende de $v \in M$ y $w \in N$

Teorema (de la dimensión para variedades lineales)

Sea V un K-e.v y sean $M = S+v$ y $N = T+w$ variedades de dimensión finita en V. Entonces

① Si $M \cap N \neq \emptyset$, $\dim(M \vee N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N)$

② Si $M \cap N = \emptyset$, $\dim(M \vee N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(S \cap T) + 1$

Demostración: Es una consecuencia de la expresión de $M \vee N$ en cada caso:

① Si $M \cap N \neq \emptyset$, entonces $M \cap N = S \cap T + u$ y $M \vee N = S+T+u$, $\forall u \in M \cap N$

luego $\dim(M \vee N) = \dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

$= \dim(M) + \dim(N) - \dim(M \cap N)$

② Si $M \cap N = \emptyset$, entonces $M \vee N = S+T+\langle v-w\rangle + w$, y luego

$\dim(M \vee N) = \dim(S+T+\langle v-w\rangle)$ pero en ese caso

$\langle v-w\rangle \cap S+T = \{0\}$, pues si no fuera así, $v - w \in S+T$

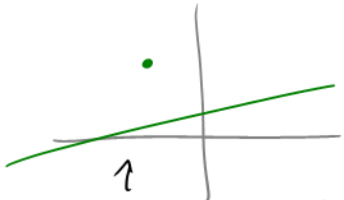
$\Rightarrow v - w = \underset{\substack{\cap \\ S}}{v'} + \underset{\substack{\cap \\ T}}{w'} \Rightarrow \underbrace{-v'+v}_{\in M} = \underbrace{w'+w}_{\in N} \Rightarrow M \cap N \neq \emptyset$

Luego $\dim(S+T+\langle v-w\rangle) = \dim(S+T)+1$.

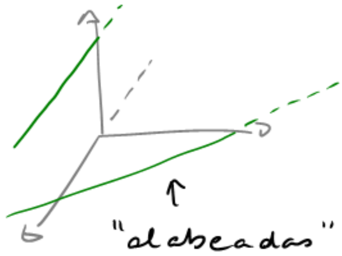
$\Rightarrow \dim(M \vee N) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) + 1$ ☒

Variedades lineales con intersección vacía

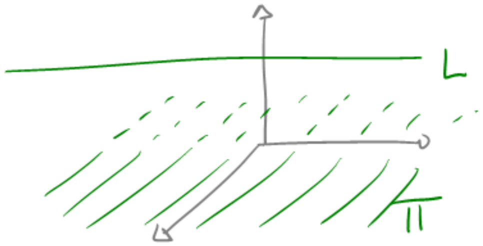
paralelas ≠



también paralelas (∄)



"alabeadas"



← también paralelas

Definición (Variedades lineales paralelas y alabeadas)

Sea V un K-e.v y sean $M = S + v$ y $N = T + w$ dos variedades en V

① Se dice que M y N son paralelas ($M \parallel N$) cuando $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$ (no son necesariamente distintas)

② Se dice que M y N son alabeadas cuando $M \cap N = \emptyset$ y $M \nparallel N$

Observaciones

① $\forall\, v \in V$, $M \subseteq V$ variedad lineal, $\{v\} \parallel V$

② Sean $M = S + v$ y $N = T + w$ de la misma dimensión. Entonces

$$M \parallel N \iff S = T$$

③ Sea $M = \{x \in K^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b\}$ y $N = \{x \in K^n : a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n = b'\}$.

Entonces $\quad M \parallel N \iff \langle (a_1, \dots, a_n) \rangle = \langle (a'_1, \dots, a'_n) \rangle$

(observar que $b = a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{x}_n$, $\forall\, \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in M$)

Ejemplos

① Hallar el plano $\parallel$ a $\langle (1,0,2), (0,2,1) \rangle + (1,0,3)$ que pasa por $(0,1,0)$

Rta: $\langle (1,0,2), (0,2,1) \rangle + (0,1,0)$

② Hallar el plano $\parallel$ a $\{(x,y,z) \in K^3 : x - y + 3z = 8\}$ que pasa por $(0,1,0)$

Rta $\{(x,y,z) \in K^3 : x - y + 3z = -1\}$

③ Hallar una recta $\parallel$ a $\{(x,y,z) \in K^3 : x - y + 3z = 8\}$ que pasa por $(0,1,0)$.

¿es única? No...

Ejercicio:

① Sean $L_1 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$, $L_2 = \langle (1,2,3) \rangle + (0,1,2)$

Hallar $L_1 \cap L_2$: $(k, 2k+1, 3k+2) \in L_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} k + 2(2k+1) + 3(3k+2) = 1 \\ 3k - (2k+1) + (3k+2) = -1 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{ (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \}$

En este caso $L_1 \vee L_2$ es un plano (que contiene a L_1 y a L_2:)

$$L_1 \vee L_2 = \langle (-5,-8,7), (1,2,3) \rangle + (-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})$$

② Sean $L_1 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 3x_1 - x_3 = 2 \\ 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \}$, $L_2 = \langle (1,2,3) \rangle + (0,1,2)$

Se tiene $L_1 \parallel L_2$ pues el vector director $(1,2,3)$ de L_2 satisface las ecuaciones homogéneas que determinan L_1: $3.1 - 3 = 0$ y $3.2 - 2.3 = 0$.

Además $L_1 \neq L_2$ pues $(0,1,2) \notin L_1 \Rightarrow$ Luego $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

En este caso $L_1 \vee L_2$ es un plano (que contiene a L_1 y a L_2):

$$L_1 \vee L_2 = \langle (1,2,3), \underbrace{(1,0,-1)} \rangle + (0,1,2)$$

$(1,1,1) \in L_1$, luego $(1,1,1) - (0,1,2) = (1,0,-1)$ vector director en $L_1 \vee L_2$

③ Sean $L_1 = \langle (1,0,-1) \rangle + (1,-1,0)$, $L_2 = \langle (0,1,-1) \rangle + (1,1,1)$

Son dos rectas alabeadas pues no son paralelas y $L_1 \cap L_2 = \emptyset$:

$(\alpha + 1, -1, -\alpha) = (1, \beta + 1, -\beta + 1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -2 \\ 0 = 3 \end{cases} \quad \emptyset$

¿Existe un plano Π que contiene a L_1 y a L_2? No pues la menor variedad que contiene a L_1 y L_2 es $L_1 \vee L_2$ con

$$\dim(L_1 \vee L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2) + 1$$
$$= 3 \Rightarrow L_1 \vee L_2 = K^3.$$

Ejercicio: Sean L_1 y L_2 dos rectas en K^n con $n \geq 2$.

Probar que existe un plano Π que contiene a L_1 y a L_2 si y solo si L_1 y L_2 no son alabeadas.