Conjuntos ortogonales y ortonormales

Definición (cjto ortogonal - cjto ortonormal)

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un K-e.v. con p.i, y sea $X \subseteq V$.

Se dice que

1. X es un conjunto ortogonal si $v \perp w$, $\forall v, w \in X$ con $v \neq w$
2. X es un conjunto ortonormal si • $v \perp w$, $\forall v, w \in X$ con $v \neq w$
   y • $\|v\| = 1$, $\forall v \in X$

Ejemplos (canónicos)

1. $\{e_1, .., e_n\}$ es un conjunto ortonormal en K^n
2. $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un cjto ortonormal en $K^{(\mathbb{N})}$ con $\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle = \sum a_n b_n$
3. $\{E^{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ es un cjto ortonormal en $K^{m \times n}$ con $\langle A, B \rangle = tr(AB^*)$
4. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx, n \in \mathbb{N}\right\}$ es un cjto ortonormal en $C[-\pi, \pi]$ con $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$ (se puede probar)

Ventajas de un conjunto ortogonal - ortonormal.

- Sea $\{v_1, .., v_N\}$ un conjunto ortogonal, entonces $\{k_1 v_1, .., k_N v_N\}$ es un cjto ortogonal, $\forall k_i \in K$; además $k_1 v_1 + .. + k_{N-1} v_{N-1} \perp k_N v_N$, $\forall k_i \in K$.

- PITAGORAS: Sea $\{v_1, .., v_N\}$ un conjunto ortogonal. Entonces
  $\| k_1 v_1 + .. + k_N v_N \|^2 = |k_1|^2 \|v_1\|^2 + .. + |k_N|^2 \|v_N\|^2$, $\forall k_1, .., k_N \in K$

- Sea $\{v_1, .., v_s\}$ un conjunto ortogonal que no contiene al 0_V, entonces es l.i.

  pues $k_1 v_1 + .. + k_s v_s = 0 \Rightarrow 0 = \langle 0, v_i \rangle = \langle k_1 v_1 + .. + k_s v_s, v_i \rangle =$
  $= k_i \|v_i\|^2 \Rightarrow k_i = 0$ pues $\|v_i\| \neq 0$, $\forall i$.

- Sea $\{v_1, .., v_r\}$ un conjunto ortogonal que no contiene a 0_V. Entonces
  $$\forall v \in \langle v_1, .., v_r \rangle, \quad v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_r \rangle}{\|v_r\|^2} v_r$$

  pues si $v = k_1 v_1 + .. + k_r v_r$, entonces
  $\langle v, v_i \rangle = k_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + k_r \langle v_r, v_i \rangle = k_i \langle v_i, v_i \rangle = k_i \|v_i\|^2$

- Sea $\{v_1, .., v_r\}$ un conjunto ortonormal. Entonces
  $$\forall v \in \langle v_1, .., v_r \rangle, \quad v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + .. + \langle v, v_r \rangle v_r$$

Bases ortogonales y bases ortonormales

Definición: Sea $(V, \langle , \rangle)$ un K-e.v con p.i. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base ortogonal (resp. ortonormal) de V si $\mathcal{B}$ es una base de V que es a la vez un cjto ortogonal (resp. ortonormal)

Ejemplo

Los ejemplos ①, ② y ③ de la página anterior son bases ortonormales de K^n, $K^{(\mathbb{N})}$ y $K^{n\times n}$ respectivamente

Observación: • Para probar que $\mathcal{B}$ es base ortogonal (resp ortonormal) de V, alcanza con probar que $\mathcal{B} \subseteq V$ es un conjto ortogonal que no contiene al vector nulo (resp. ortonormal) que genera a V.

• Si $\dim_K(V) = n$, $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$ es base ortogonal (resp. ortonormal) de V sii es un cjto ortogonal que no contiene al vector nulo (resp. es un cjto ortonormal)

• Sea $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$ base de V. Entonces $\mathcal{B}$ es base ortogonal de V para $\langle , \rangle$ si y sólo si

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \langle v_n, v_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Y $\mathcal{B}$ es base ortonormal de V para $\langle , \rangle$ si y sólo si $G_{\mathcal{B}} = Id_n$.

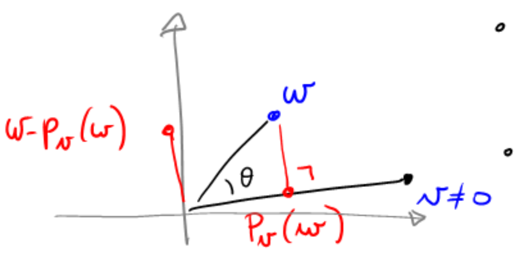
• Sea $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$ base ortonormal de V.

Entonces $\langle v, w\rangle = [v]_{\mathcal{B}}^t \cdot \overline{[w]_{\mathcal{B}}}$ (pues $G_{\mathcal{B}} = Id_n$)

Pero $v = \sum \langle v, v_i\rangle v_i$, $w = \sum \langle w, v_i\rangle v_i$. Luego

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle \overline{\langle w, v_i\rangle} \quad \text{y} \quad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i\rangle|^2,$$

Componente de w en la dirección de v



• Caso $\mathbb{R}^2$: $P_v(w) = \cos\theta \cdot \|w\| \cdot \dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{\langle w, v\rangle}{\|v\|^2} v$.

• $\langle , \rangle$ arbitrario: $w - \lambda v \perp v \iff 0 = \langle w - \lambda v, v\rangle = \langle w, v\rangle - \lambda \|v\|^2 \iff \lambda = \dfrac{\langle w, v\rangle}{\|v\|^2}$: $P_v(w) = \dfrac{\langle w, v\rangle}{\|v\|^2} v$

Ortogonalización de Gram-Schmidt

(Gram 1850-1916, Erhard Schmidt 1876-1959)
(Laplace 1749-1827)

- Input: $(v_1, .., v_s)$ conjunto li en $(V, <,>)$
- Output: $(w_1, .., w_s)$ conjunto ortogonal en $(V, <,>)$

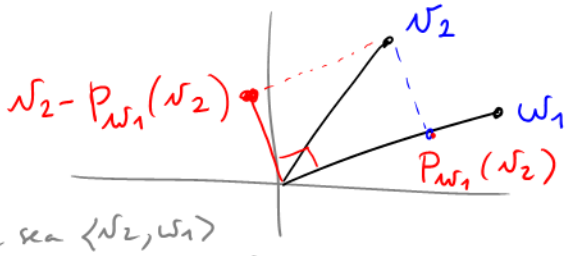
que cumple:

$$\begin{cases} \langle w_1 \rangle = \langle v_1 \rangle \\ \langle w_1, w_2 \rangle = \langle v_1, .., v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle w_1, ..., w_s \rangle = \langle v_1, .., v_s \rangle \end{cases}$$

Algoritmo:

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$

↑ ojo: en $\mathbb{C}$ importa que sea $\langle v_2, w_1 \rangle$ y no $\langle w_1, v_2 \rangle$...



- $w_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dfrac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$

$\vdots$

- $w_s = v_s - \dfrac{\langle v_s, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dots - \dfrac{\langle v_s, w_{s-1} \rangle}{\|w_{s-1}\|^2} w_{s-1}$

Demostración

- Está claro, despejando v_k en c/paso, que $v_k \in \langle w_1, .., w_k \rangle$, $1 \le k \le s$, luego $\langle v_1, .., v_k \rangle \subseteq \langle w_1, .., w_k \rangle$, $1 \le k \le s$, y como $\langle v_1, .., v_k \rangle$ li, $\dim(\langle v_1, .., v_k \rangle) = k \Rightarrow \langle v_1, .., v_k \rangle = \langle w_1, .., w_k \rangle$, $1 \le k \le s$.
- Probemos que $\{w_1, .., w_s\}$ es ortogonal inductivamente:
  - * $w_2 \perp w_1$ por construcción
  - * HI: $\{w_1, .., w_k\}$ ortogonal. Qpq $\{w_1, .., w_{k+1}\}$ lo es también.

Para eso alcanza con probar que $w_{k+1} \perp w_j$ para $1 \le j \le k$:

$$\langle w_{k+1}, w_j \rangle = \left\langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i \, , \, w_j \right\rangle$$

$$= \langle v_{k+1}, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \underbrace{\langle w_i, w_j \rangle}_{1 \iff i=j}$$

$$= \langle v_{k+1}, w_j \rangle - \frac{\langle v_{k+1}, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \langle w_j, w_j \rangle = 0.$$ Luego $w_{k+1} \perp w_j$, $1 \le j \le k$

$\boxtimes$

Observación: Si se quiere un conjunto ortonormal, se puede calcular primero un cjto ortogonal por Gram-Schmidt, y luego normalizar cada vector w_i obtenido para obtener el cjto ortonormal $\left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_s}{\|w_s\|} \right\}$

(Algunos normalizan a cada paso, yo particularmente encuentro más cómodo normalizar al final)

Ejemplo:

① $v_1 = (i, 1, -i, -1)$, $v_2 = (0, 1, -2i, -1)$, $v_3 = (i, 0, i, 4)$

$\Rightarrow w_1 = v_1 = (i, 1, -i, -1)$

$\langle v_2, w_1 \rangle = 1 - 2i \cdot i + 1 = 4$, $\|w_1\|^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Luego $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = v_2 - w_1 = (-i, 0, -i, 0)$

$\langle v_3, w_1 \rangle = i \cdot (-i) + i \cdot i + 4(-1) = -4$

$\langle v_3, w_2 \rangle = i \cdot i + i \cdot i = -2$

$\|w_2\|^2 = 2$.

Luego $w_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \dfrac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = v_3 + w_1 + w_2 = (i, 1, -i, 3)$

$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

Y si uno busca una base ortonormal de este subespacio:

$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3 \rangle$ con

$\tilde{w}_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|} = \left(i/2, 1/2, -i/2, -1/2 \right)$, $\tilde{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} i, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} i, 0 \right)$, $\tilde{w}_3 = \left(\frac{\sqrt{3} i}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6} i, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

② Ortonormalizar la base de $\left\langle \underset{A_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{A_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}, \underset{A_3}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}} \right\rangle = S$

$B_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B_2 = A_2 - \dfrac{\langle A_2, B_1 \rangle}{\|B_1\|^2} B_1$: $\langle A_2, B_1 \rangle = tr(A_2 B_1^t) = 3$, $\|B_1\|^2 = 3$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_3 = A_3 - \dfrac{\langle A_3, B_1 \rangle}{\|B_1\|^2} B_1 - \dfrac{\langle A_3, B_2 \rangle}{\|B_2\|^2} B_2$ $\quad \langle A_3, B_1 \rangle = 2$, $\langle A_3, B_2 \rangle = 1$, $\|B_2\|^2 = 1$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

Normalizando queda $S = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

(Inestable numéricamente - Hay modificaciones más estables)

El método de Gram-Schmidt produce como consecuencia inmediata:

Proposición Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{K}$-e.v. con p.i. de dim finita y sea $S \neq \{0\}$ un subespacio. Entonces existe una base ortonormal de V que contiene una base (ortonormal) de S.

Complemento ortogonal:

Definición (complemento ortogonal)

Sea $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{K}$-e.v con p.i. y sea $S \subseteq V$ un subespacio.

El **complemento ortogonal** de S en V es

$$S^\perp = \{ v \in V : v \perp s, \forall s \in S \}$$

Observaciones ⓪ $\{0_V\}^\perp = V$ y $V^\perp = \{0_V\}$ (pues si $v \in V^\perp \Rightarrow 0 = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 \Rightarrow v = 0$)

① $S^\perp$ es un subespacio de V

pues $0_V \in S^\perp$; $v, v' \in S^\perp \Rightarrow v \perp s, v' \in s, \forall s \in S \Rightarrow v + v' \perp s, \forall s \in S$
$kv \perp s, \forall s \in S$

② Si $S = \langle v_1, .., v_s \rangle$, entonces $v \in S^\perp \Leftrightarrow v \perp v_1, .., v \perp v_s$

③ Si V tiene dimensión finita y $\mathcal{B} = (v_1, .., v_s, v_{s+1}, .., v_n)$ es base ortogonal de V tq $(v_1, .., v_s)$ es base de S, entonces $(v_{s+1}, .., v_n)$ es base de $S^\perp$.

pues $v_{s+1}, .., v_n$ son l.i por ser parte de una base, y $\forall v \in V$, se tiene

$$v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_s \rangle}{\|v_s\|^2} v_s + \frac{\langle v, v_{s+1} \rangle}{\|v_{s+1}\|^2} v_{s+1} + \dots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

luego, si $v \in S^\perp$; como $\langle v, v_1 \rangle = .. = \langle v, v_s \rangle = 0$, ent $v \in \langle v_{s+1}, ..., v_n \rangle$.

Luego, si V tiene dimensión finita:

- $\dim(S^\perp) = \dim(V) - \dim(S)$
- $V = S \oplus S^\perp$
- $(S^\perp)^\perp = S$

pues $(S^\perp)^\perp = \{ w \in V : w \perp v, \forall v \in S^\perp \}$

Sea $s \in S$, entonces $v \perp s$, $\forall v \in S^\perp$, y por lo tanto $s \perp v$, i.e $s \in (S^\perp)^\perp$

Así $\underbrace{S \subseteq (S^\perp)^\perp}_{\text{vale siempre}}$ y $\underbrace{\text{tienen la misma dimensión}}_{\text{por dim. finita}}$. Luego $S = (S^\perp)^\perp$.