BASES Y DIMENSIÓN

Una primer observación:

Si V es un K-e.v. finitamente generado, de todo cjto generador infinito de V se puede extraer un cjto generador finito (pues si $V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ por ser f.g y además $V = \langle X \rangle$ con X infinito, podemos escribir cada v_i como c.l. de finitos vectores de X. Luego tomando el conjunto de todos los vectores de X que usamos para escribir todos los v_i (que son finitos) obtenemos $A \subseteq X$ finito tq $V = \langle A \rangle$.

Proposición. Sea V un K-e.v f.g y sean

$\{v_1, \dots, v_s\}$ un conjunto generador de V

$\{w_1, \dots, w_r\}$ un conjunto linealmente independiente en V

Entonces $r \leq s$. (Es decir $\#(li) \leq \#(sg)$)

Demostración: Supongamos por el contrario que $r > s$. Vamos a llegar a que entonces $w_1, \dots, w_r$ no pueden ser l.i mostrando que existe una c.l. $k_1 w_1 + \dots + k_r w_r = 0$ con los k_i no todos nulos.

Como $w_j \in V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$, existen $a_{ij} \in K$, $1 \leq i \leq s$, tq

$w_j = a_{1j} v_1 + \dots + a_{sj} v_s$, para $1 \leq j \leq r$.

Luego $k_1 w_1 + \dots + k_r w_r = k_1 (a_{11} v_1 + \dots + a_{s1} v_s) + \dots + k_r (a_{1r} v_1 + \dots + a_{sr} v_s)$

$= (a_{11} k_1 + \dots + a_{1r} k_r) v_1 + \dots + (a_{s1} k_1 + \dots + a_{sr} k_r) v_r$.

Ahora bien el sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \updownarrow s < r$$

es un sistema homogéneo con s ecuaciones y r incógnitas, donde $s < r$: es compatible indeterminado y tiene una solución $(k_1, \dots, k_r)$ no nula tq $k_1 w_1 + \dots + k_r w_r = 0$. O sea $\{w_1, \dots, w_r\}$ no es l.i $\boxtimes$

Como consecuencia se obtiene el siguiente resultado esencial:

Teorema (dimensión)

Sea V un K-e.v finitamente generado. Entonces toda base de V es finita y todas las bases de V tienen el mismo cardinal. Ese número se llama la **dimensión** de V: $\dim_K(V) = \#(\text{base de } V)$

Demostración:

Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases de V. Entonces son ambas finitas pues sabemos que como V es f.g, si por ejemplo $\#(\mathcal{B}_1) = \infty$, tendríamos dentro de $\mathcal{B}_1$ un s.g. finito $\mathcal{B}$. Pero entonces $\mathcal{B}_1$ no sería l.i pues cualquier $v \notin \mathcal{B}$ es c.l. de los vectores de $\mathcal{B}$, o sea $\mathcal{B} \cup \{v\} \subseteq \mathcal{B}_1$ no es un conjunto l.i.

Ahora bien, si $\#\mathcal{B}_1 = r$ y $\#\mathcal{B}_2 = s$, se tiene $r \leq s$ por ser $\mathcal{B}_1$ l.i y $\mathcal{B}_2$ s.g, y también se tiene $s \leq r$ por ser $\mathcal{B}_1$ sg y $\mathcal{B}_2$ li. Luego $r = s$. $\boxtimes$

Ejemplos:

- $\dim_K K^n = n$
- $\dim_K K^{m\times n} = m \cdot n$
- $\dim_K(K_n[X]) = n+1$
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

Comentario 1 Vale el mismo resultado para e.v. no f.g pero no lo demostraremos aquí, ya que esto exige conocimientos de cardinalidad de conjuntos infinitos y otras herramientas como el axioma de elección o más específicamente el lema de Zorn (que verán más adelante).

Comentario 2 Vimos que dos bases de e.v. tienen el mismo cardinal pero aún no mostramos que todo e.v tiene base! Esto será una consecuencia del próximo resultado

Teorema (conjuntos generadores, conjuntos li y bases)

Sea V un K-e.v (f.g.)

1. De todo conjunto generador (finito) de V se puede extraer una base
2. Todo cjto l.i en V se puede extender a una base

Demostración (En el caso en que V es f.g.)

1. Supongamos $V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$. Queremos extraer una base de $A = \{v_1, \dots, v_s\}$. Lo haremos paso a paso, fijandonos cuáles son los vectores superfluos que se pueden tirar y quedandonos con los indispensables.

Si $v_1 \neq 0$, pongo $A_1 = \{v_1\}$ y $V_1 = \langle v_1 \rangle$. Ahora considero v_2:
Si $v_2 \in V_1$, no lo agrego ya que en este caso $V_1 + \langle v_2 \rangle = V_1$. Pongo entonces $A_2 := A_1$ y $V_2 := V_1$. Mientras que si $v_2 \notin V_1$, defino $A_2 := A_1 \cup \{v_2\}$, $V_2 := \langle A_2 \rangle = V_1 + \langle v_2 \rangle$. Observemos que en ambos casos A_2 es li pues si $A_2 = A_1$, está claro, y si $A_2 = \{v_1, v_2\}$: sea $k_1 v_1 + k_2 v_2 = 0$. Entonces no puede ser $k_2 \neq 0$ pues sería $v_2 = -\frac{k_1}{k_2} v_1 \in V_1$.; luego $k_2 = 0$, lo que implica $k_1 = 0$ pues $v_1 \neq 0$.

Además observemos que en ambos casos $V_2 = \langle v_1, v_2 \rangle$.

La construcción sigue recursivamente del mismo modo.

Supongamos tenemos definido $A_j \subseteq \{v_1, \dots, v_j\}$ y V_j tales que A_j es un cjto li y $V_j = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$. Consideramos v_{j+1}:
Si $v_{j+1} \in V_j$, no lo agrego ya que en ese caso $V_j + \langle v_{j+1} \rangle = V_j$:
Defino $A_{j+1} := A_j$ y $V_{j+1} := V_j$. Mientras que si $v_{j+1} \notin V_j$, defino $A_{j+1} := A_j \cup \{v_{j+1}\}$ y $V_{j+1} := \langle A_{j+1} \rangle = V_j + \langle v_{j+1} \rangle$. De nuevo en ambos casos A_{j+1} es un cjto l.i pues si $A_{j+1} = A_j$, está claro (A_j lo es); y si $A_{j+1} = A_j \cup \{v_{j+1}\} = \{\underbrace{v'_1, \dots, v'_i}_{A_j}, v_{j+1}\}$: planteamos

$$k_1 v'_1 + \dots + k'_i v'_i + k_{j+1} v_{j+1} = 0.$$

No puede ser $k_{j+1} \neq 0$ pues si lo fuera, $v_{j+1} = \frac{-k_1}{k_{j+1}} v'_1 - \dots - \frac{k_i}{k_{j+1}} v'_i \in V_j$
luego $k_{j+1} = 0$ y esto implica $k_1 = \dots = k_i = 0$ por ser A_j un cjto li.
Además observemos que por construcción $V_j = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$.
El proceso termina para $j = s$: A_s es un cjto li y $V_s = \langle A_s \rangle = V$

② Observemos que en el proceso anterior, se respetó el orden de los vectores manteniendo los primeros si son l.i.

Luego si $\{w_1, .., w_r\}$ es un cjto l.i en $V = \langle v_1, .., v_s \rangle$ f.g, aplicando la construcción anterior a $A = \{w_1, .., w_r, v_1, .., v_s\}$, que obviamente genera a V, obtengo una base de V que contiene el cjto l.i. $\{w_1, .., w_r\}$ $\boxtimes$

Consecuencia Todo K-e.v (f.g.) $\neq \{0\}$ tiene base.

Convención: $\dim(\{0\}) = 0$. (pues no tiene base).

Más consecuencias: Sea V un K-e.v de dimensión n.

① $\{v_1, .., v_r\} \subseteq V$ li $\Rightarrow$ $r \leq n$

$\{v_1, .., v_n\} \subseteq V$ li $\Rightarrow$ $\{v_1, .., v_n\}$ base de V

② $\{v_1, .., v_s\} \subseteq V$ sg $\Rightarrow$ $s \geq n$

$\{v_1, .., v_n\} \subseteq V$ sg $\Rightarrow$ $\{v_1, .., v_n\}$ base de V

③ Sea S un subespacio de V. Entonces

- $\dim(S) \leq \dim(V)$
- $\dim(S) = n \Rightarrow S = V$

Espacios determinados por una matriz

Sea $A \in K^{m \times n}$. Podemos definir a partir de A 3 e.v:

① $N(A) := \{x \in K^n : Ax = 0\} \subseteq K^n$ ← espacio nulo de A

② $E_F(A) := \langle F_1(A), \ldots, F_m(A) \rangle \subseteq K^n$ ← espacio fila de A

(generado por las filas de A, como vectores de K^n)

③ $E_C(A) := \langle C_1(A), \ldots, C_n(A) \rangle \subseteq K^m$ ← espacio columna de A

(generado por las columnas de A, como vectores de K^m)

Se tiene:

- $\dim(N(A)) = n - \#$(filas no nulas en la matriz escalón reducida de A)
- $rg_F(A) := \dim(E_F(A)) = \#$(filas no nulas " ") ← rango fila de A
- $rg_C(A) := \dim(E_C(A))$ ← rango columna de A.

Observemos que $\dim(N(A)) + rg_F(A) = n$.

Más adelante probaremos que $rg_F(A) = rg_C(A) = rg(A)$ ← rango de A

Suma directa de subespacios

Proposición - Definición (Suma directa)

Sea V un K-e.v y sean S, T subespacios de V.
Son equivalentes

1. $\forall v \in V, \exists!\, s \in S, t \in T : v = s + t$
2. Si $\mathcal{B}_S$ es base de S y $\mathcal{B}_T$ es base de T, entonces $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_T$ es base de V.
3. $V = S + T$ y $S \cap T = \{0_V\}$.

En ese caso se dice que V es suma directa de S y T y se nota $V = S \oplus T$:

$$V = S \oplus T \iff V = S + T \text{ y } S \cap T = \{0\}$$

Demostración:

$(1 \Rightarrow 2)$ $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_T$ genera V pues $\mathcal{B}_S$ genera S, $\mathcal{B}_T$ genera T, y $\forall v \in V$, existen $s \in S, t \in T : v = s + t$. Probemos entonces que $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_T$ es l.i: Sup $k_1 v_1 + \dots + k_r v_r + k_1' w_1 + \dots + k_s' w_s = 0$ donde $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq \mathcal{B}_S$ y $\{w_1, \dots, w_s\} \subseteq \mathcal{B}_T$.

luego $0 = (\underbrace{k_1 v_1 + \dots + k_r v_r}_{\in S}) + (\underbrace{k_1' w_1 + \dots + k_s' w_s}_{\in T}) = \underset{\in S}{0} + \underset{\in T}{0}$

La unicidad de escritura implica $k_1 v_1 + \dots + k_r v_r = 0$ y $k_1' w_1 + \dots + k_s' w_s = 0$

Pero $\mathcal{B}_S$ y $\mathcal{B}_T$ son l.i. Luego $k_1 = \dots = k_r = 0$ y $k_1' = \dots = k_s' = 0$ como se quería.

$(2 \Rightarrow 3)$ Claramente $\langle \mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_T \rangle = V \Rightarrow V = S + T$.
Falta mostrar que $S \cap T = \{0_V\}$. Sea $v \in S \cap T$, qpq $v = 0$.
Pero $v = \underbrace{k_1 v_1 + \dots + k_r v_r}_{\in S} = \underbrace{k_1' w_1 + \dots + k_s' w_s}_{\in T} \Rightarrow k_1 v_1 + \dots + k_r v_r - k_1' w_1 - \dots - k_s' w_s = 0$
$\Rightarrow k_1 = \dots = k_r = k_1' = \dots = k_s' = 0$ por ser $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_T$ base de V. Luego $v = 0$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Está claro que $\forall v \in V, \exists\, s \in S, t \in T : v = s + t$ pues $V = S + T$.
Si se tuvieran 2 escrituras $v = s_1 + t_1 = s_2 + t_2$, entonces $s_1 - s_2 = t_1 - t_2$ es un vector que pertenece a $S \cap T \Rightarrow s_1 - s_2 = t_1 - t_2 = 0 \Rightarrow s_1 = s_2$ y $t_1 = t_2$ ⊠

Ejemplo

1. $\mathbb{C}^3 = S \oplus T$ con $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : 2x - y + z = 0\}$ y $T = \langle (1,1,1) \rangle$

Alcanza con probar que $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_T$ es base de $\mathbb{C}^3$.
Pero por ejplo $\mathcal{B}_S = \{(1,2,0),(1,0,-2)\}$ y $\mathcal{B}_T = \{(1,1,1)\}$.
El resto es una simple verificación.

(2) Sean $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es fción par}\} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es fción impar}\} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.
Entonces $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$ son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Verificar que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$ son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cualquiera. Si definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces g es una fción par (verificarlo), y si definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces h es una fción impar (verificarlo).
  Ahora bien, $f(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = g(x) + h(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
  Luego $f = g + h \in \mathcal{P} + \mathcal{I}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.
- Qpq $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. Sup $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Entonces $\forall x \in \mathbb{R}$,
  $$\left.\begin{aligned} f(-x) &= f(x) && \text{por ser par} \\ &= -f(x) && \text{por ser impar} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
  Luego $f = 0$

Teorema de la dimensión (de subespacios)

Sea V un K-e.v de dimensión finita, y sean S, T subespacios.
Entonces $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$.

Antes de probar este resultado, mostremos algunas consecuencias.

Consecuencias: Sea V un K-e.v. de dim finita, S y T subespacios

(1) Si $\dim(S) + \dim(T) = \dim(V)$ y $S \cap T = \{0\}$, entonces $V = S \oplus T$

(2) Si $\dim(S) + \dim(T) = \dim(V)$ y $V = S + T$, entonces $V = S \oplus T$

Demostración

(1) $\dim(S+T) = \dim(V) \Rightarrow S + T = V$

(2) $\dim(V) = \dim(V) - \dim(S \cap T) \Rightarrow \dim(S \cap T) = 0 \Rightarrow S \cap T = \{0\}$