Algebra I

2do. Cuatrimestre 2012

Práctica 4 - Enteros

1. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$:

   i) $a.b \mid c \Longrightarrow a \mid c$ y $b \mid c$ *ii)* $4 \mid a^2 \Longrightarrow 2 \mid a$ *iii)* $2 \mid a.b \Longrightarrow 2 \mid a$ ó $2 \mid b$

   iv) $9 \mid a.b \Longrightarrow 9 \mid a$ ó $9 \mid b$ *v)* $a \mid b + c \Longrightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$ *vi)* $a \mid c$ y $b \mid c \Longrightarrow a.b \mid c$

   vii) $a \mid b \Longrightarrow a \leq b$ *viii)* $a \mid b + a^2 \Longrightarrow a \mid b$.

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que:

   i) $3n - 1 \mid n + 7$.   *ii)* $3n - 2 \mid 5n - 8$.

   iii) $2n + 1 \mid n^2 + 5$.   *iv)* $n - 2 \mid n^3 - 8$.

3. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   i) $99 \mid 10^{2n} + 197$.   *ii)* $9 \mid 7.5^{2n} + 2^{4n+1}$.

   iii) $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$.   *iv)* $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$.

4. (a) Probar que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Probar que si n es un número natural par entonces $a + b \mid a^n - b^n$

   (c) Probar que si n es un número natural impar entonces $a + b \mid a^n + b^n$

5. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

   (a) El producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$.

   (b) $\binom{2n}{n}$ es divisible por 2.

   (c) $2^n.\prod_{i=1}^{n}(2i - 1)$ es divisible por $n!$.

   (d) $\binom{2n}{n}$ es divisible por $n + 1$.

   (Sugerencia: probar que $(2n + 1)\binom{2n}{n} = (n + 1)\binom{2n+1}{n}$.)

6. Hallar todos los primos positivos menores o iguales que 100.

7. (a) Probar que un número natural n es compuesto si y sólo si es divisible por algún primo positivo $p \leq \sqrt{n}$.

   (b) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 209, 307, 791, 1001, 3001.

8. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

   (a) si $n \neq 1$ y $n \mid (n - 1)! + 1$ entonces n es primo;

   (b) si $2^n - 1$ es primo entonces n es primo;

   (c) si $2^n + 1$ es primo entonces n es una potencia de 2.

9. Probar que existen infinitos primos.

(Sugerencia: probar que si existieran finitos primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entonces $a = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$ sería un entero distinto de 1 y -1 que no es divisible por ningún primo.)

10. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos

$i)$ $a = 133, \quad b = -14.$ $ii)$ $a = 13, \quad b = 111.$ $iii)$ $a = 3b + 7, \quad b \neq 0.$
$iv)$ $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0.$ $v)$ $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2 (n \in \mathbb{N}).$ $vi)$ $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1 (n \in \mathbb{N}).$

11. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de:

$i)$ la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18. $ii)$ la división de a por 3. $iii)$ la división de $4a + 1$ por 9.
$iv)$ la división de $a^2 + 7$ por 36. $v)$ la división de $7a^2 + 12$ por 28. $vi)$ la división de $1 - 3a$ por 27.

12. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales el resto de la división de $n^3 + 4n + 5$ por $n^2 + 1$ sea $n - 1$.

13. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros. Probar que existen r, s tales que $\sum_{j=0}^{s} a_{r+j}$ es divisible por n.

(Sugerencia: Considere los n números a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + \cdots a_n$ y pruebe que si ninguno de ellos es divisible por n entonces necesariamente dos de ellos tienen el mismo resto en la división por n.)

14. (a) Hallar el desarrollo en base 2 de:
i) 1365. ii) 2800. iii) 3.2^{13}. iv) $13.2^n + 5.2^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.
(b) Hallar el desarrollo en base 7 de 8575.
(c) Hallar el desarrollo en base 16 de 2800.
(d) Sea a un entero. Probar que si el desarrollo en base 10 de a termina en n ceros entonces el desarrollo en base 5 de a termina en por lo menos n ceros.

15. (a) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 22$ (14). Hallar el resto de dividir a a por 2, por 7 y por 14.
(b) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 13$ (5). Hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5.
(c) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i . i!$ por 36.

16. (a) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 \equiv 3 \pmod{11}$.
(b) Probar que no existe ningún entero a tal que $a^3 \equiv -3 \pmod{13}$.
(c) Probar que $a^2 \equiv -1$ (5) $\Longleftrightarrow a \equiv 2$ (5) ó $a \equiv 3 \pmod{5}$.
(d) Probar que $a^7 \equiv a \pmod{7}$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}$.
(e) Probar que $3 \mid a^2 + b^2 \Longleftrightarrow 3 \mid a$ y $3 \mid b$.
(f) Probar que $7 \mid a^2 + b^2 \Longleftrightarrow 7 \mid a$ y $7 \mid b$.
(g) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 \Longleftrightarrow a \equiv 2b \pmod{5}$ ó $a \equiv 3b \pmod{5}$.
(h) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \Longrightarrow 5 \mid a$ ó $5 \mid b$.
(i) Probar que cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 + 1$ no es divisible por 8.

17. Sea a un entero impar que no es divisible por 5.

(a) Probar que $a^4 \equiv 1 \pmod{10}$.

(b) Probar que a y a^{45321} tienen el mismo resto en la división por 10.

18. (a) Probar que $2^{5n} \equiv 1 \pmod{31}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
    (b) Hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31.
    (c) Sea $k \in \mathbb{N}$. Sabiendo que $2^k \equiv 39 \pmod{31}$, hallar el resto de la división de k por 5.
    (d) Hallar el resto de la división de $43.2^{163} + 11.5^{221} + 61^{999}$ por 31.

19. (a) Sea a un entero impar. Probar que $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
    (b) Hallar el resto de la división de 5^{2267} por 32.

20. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Probar que:
    (a) $3 \mid a$ ó $3 \mid b$.
    (b) $5 \mid a$ ó $5 \mid b$ ó $5 \mid c$.
    (c) $4 \mid a$ ó $4 \mid b$.

21. Enunciar y demostrar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11.

22. Probar que existen infinitos primos congruentes a 3 módulo 4.

    (Sugerencia: probar primero que un número congruente a 3 módulo 4 distinto de 1 y -1 necesariamente es divisible por un primo congruente a 3 módulo 4. Luego probar que si existieran finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, entonces $a = -1 + 4.\prod_{i=1}^{n} p_i$ sería un entero distinto de 1 y -1 que no es divisible por ningún primo congruente a 3 módulo 4.)

23. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b

    $$i)\, a = 2532, b = 63 \quad ii)\, a = 5335, b = 110 \quad iii)\, a = 131, b = 23 \quad iv)\, a = n^2 + 1, b = n + 2\, (n \in \mathbb{N}).$$

24. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que el resto de dividir a a por b es 27 y que $b \equiv 48 \pmod{27}$, calcular $(a : b)$

25. Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que $(a^n - 1 : a^m - 1) = a^{(n:m)} - 1$

    (Sugerencia: probar que si r es el resto de la división de n por m entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$).

26. Sea $a \in \mathbb{Z}$
    (a) Probar que $(5a + 8 : 7a + 3) = 1$ o 41.
    (b) Probar que $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) = 1$ o 43.

27. (a) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$.
    (b) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.
    (c) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$.

28. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar que si a y b son coprimos entonces $(a : b.c) = (a : c)$.

    (Sugerencia: probar que $(a : b.c)$ y b son coprimos.)

29. Sean p y q primos positivos distintos y sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $p.q \mid a^n$ entonces $p.q \mid a$.

30. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que si $(a : b) = 1$ entonces $(a^2.b^3 : a + b) = 1$.

31. (a) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$. Probar que $(c.a : c.b) = c.(a : b)$.
    (b) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que:
        i. Si $(a : b) = 1$ entonces $(a^n : b^n) = 1$.
        ii. Si $(a : b) = d$ entonces $(a^n : b^n) = d^n$.
        iii. Si $a^n \mid b^n$ entonces $a \mid b$.

32. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que:
    (a) si $(a : b) = 1$ entonces $(7a - 3b : 2a - b) = 1$.
    (b) si $(a : b) = 1$ entonces $(2a - 3b : 5a + 2b) = 1$ ó 19.
    (c) si $(a : b) = 2$ entonces $(5a - 3b : 4a + b) = 2$ ó 34.
    (d) si $(a : b) = 3$ entonces $(a.b^2 : 9a + 9b) = 27$.

33. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que:
    (a) $(2^n + 7^n : 2^n - 7^n) = 1$.
    (b) $(2^n + 5^{n+1} : 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9.
    (c) $(3^n + 5^{n+1} : 3^{n+1} + 5^n) = 2$ ó 14.

34. Determinar, cuando existan, todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que satisfacen:

$i)$ $5a + 8b = 3$	$ii)$ $7a + 11b = 10$	$iii)$ $24a + 14b = 7$
$iv)$ $20a + 16b = 36$	$v)$ $39a - 24b = 6$	$vi)$ $1555a - 300b = 11$

35. Si se sabe que cada unidad de un cierto producto A cuesta 39 pesos y que cada unidad de un cierto producto B cuesta 48 pesos, ¿cuántas unidades de cada producto se pueden comprar con 135 pesos?

36. Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia

$i)$ $17X \equiv 3 \pmod{11}$	$ii)$ $56X \equiv 2 \pmod{884}$
$iii)$ $56X \equiv 28 \pmod{35}$	$iv)$ $33X \equiv 27 \pmod{45}$.

37. Hallar el resto de la división de un entero a por 18, sabiendo que el resto de la división de $7a$ por 18 es 5.

38. (a) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(7a + 1 : 5a + 4) \neq 1$.
    (b) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) \neq 1$.