1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre: Libreta:

Final de Álgebra 1, 22/02/2013

1. Un mazo de 50 cartas españolas, posee 10 cartas especiales que son los 8 y 9 de cada palo, más los dos comodines. Además de estas 10 cartas especiales, vienen las 40 cartas clásicas. Un fábrica de cartas decide empaquetar sus cartas poniendo las 40 cartas comunes ordenadas por número y palo (viniendo primero los oros, luego las copas, luego las espadas y por último los bastos) y colocando las otras 10 cartas especiales en cualquier orden, intercaladas entre las 40 cartas comunes. ¿De cuántas maneras puede venir el mazo?

2. El objetivo de este ejercicio es demostrar el resultado conocido de la conmutatividad del producto de números naturales (con lo cual no se puede usar esta propiedad). Para ello definimos una función $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por:
$$p(m,n) = \underbrace{m + \cdots + m}_{n \text{ veces}}.$$
Notar que justamente esta función coincide con el producto de números naturales. La definición formal e inductiva de esta función es la siguiente:
$$p(m,n) = \begin{cases} m & \text{si } n = 1, \\ p(m,n-1) + m & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$
Probar que para todo par de números naturales m, n, vale que
$$p(m,n) = p(n,m).$$
Sugerencia: hacer inducción en $\max(n,m)$.

3. (a) Encontrar un número primo p y un número primo q tal que la ecuación $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ tenga solución y la ecuación $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{q}$ no tenga solución.
   (b) Encontrar un número natural m que sea el producto de 3 números primos y tal que la ecuación $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ tenga exactamente 4 soluciones módulo m.
   (c) Encontrar un número natural m que sea el producto de 3 números primos y tal que la ecuación $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ tenga exactamente 8 soluciones módulo m.

4. Consideremos un polinomio cúbico $q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a, b, $c \in \mathbb{C}$, y supongamos que $q(x)$ tiene al menos dos raíces racionales.

   (a) Probar que si $a \in \mathbb{Q}$ entonces $q \in \mathbb{Q}[x]$ y todas sus raíces son racionales.

   (b) ¿Es cierto que si $c \in \mathbb{Q}$ entonces $q \in \mathbb{Q}[x]$ y todas sus raíces son racionales? (dar una demostración o un contraejemplo).

   (c) ¿Es cierto que si $b \in \mathbb{Q}$ entonces $q \in \mathbb{Q}[x]$ y todas sus raíces son racionales? (dar una demostración o un contraejemplo).

5. Recordar que si n es un número natural, el n-ésimo número de Fermat se define como
$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$
   Probar las siguientes afirmaciones:

   (a) El número F_n es divisible por 5 si y solo si $n = 1$.

   (b) El número F_n nunca es divisible por 7.

   (c) El número F_n nunca es divisible por 11.