1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre: Libreta:

Final de Álgebra 1, 28/12/2012

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por G_n al conjunto de raíces n-ésimas de la unidad. Probar que si p y q son primos positivos distintos, la suma de las raíces primitivas de G_{pq} es 1.

2. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio tal que al evaluarlo en cualquier número entero a, $f(a)$ resulta siempre un múltiplo de 101 o un múltiplo de 107 (ambos son números primos). Probar entonces que o bien $f(a)$ es siempre divisible por 101 para todos los valores de a, o bien $f(a)$ es siempre divisible por 107 para todos los valores de a.

3. Dado un número natural n, determinar el resto de dividir por 5 a n^n en términos de una congruencia adecuada para n.

4. Decir si una relación en un conjunto A puede ser

   (a) simétrica, antisimétrica y transitiva.

   (b) simétrica, antisimétrica y no transitiva.

   (c) simétrica, no antisimétrica y transitiva.

   (d) simétrica, no antisimétrica y no transitiva.

   (e) no simétrica, antisimétrica y transitiva.

   (f) no simétrica, antisimétrica y no transitiva.

   (g) no simétrica, no antisimétrica y transitiva.

   (h) no simétrica, no antisimétrica y no transitiva.

   Encontrar un ejemplo en los casos afirmativos y demostrar la imposibilidad en los negativos. Sugerencia: en todos los casos positivos alcanza con un conjunto A de 3 elementos.

5. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de

   $$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$

   sea una raíz sexta primitiva de la unidad. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$