1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre: Libreta:

Final de Álgebra 1, 21/12/2012

1. (a) Sea f_n la sucesión de Fibonacci, dada por

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}\ \forall n \geq 1.$$

Sean a, $b \in \mathbb{Z}$ no ambos nulos. Probar que $\forall n \geq 0$ se tiene

$$(f_n a + f_{n+1} b\ :\ f_{n+1} a + f_{n+2} b) = (a\ :\ b).$$

(b) Encontrar otra sucesión g_n en $\mathbb{Z}$ tal que

$$(g_n a + g_{n+1} b\ :\ g_{n+1} a + g_{n+2} b) = (a\ :\ b), \quad \forall n \geq 0.$$

2. (a) Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 5 tal que $1 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{3}$ son raíces de f. Probar que f tiene una raíz racional.

(b) Encontrar un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 5 con raíz $1 + \sqrt{2}$ pero sin raíces racionales.

3. Probar que si p y q son primos positivos distintos, y si a es coprimo con pq, entonces $a^{[p-1\ :\ q-1]} \equiv 1 \pmod{pq}$.

4. Dado $k \in \mathbb{N}$, $G_k = \{z \in \mathbb{C} \mid z^k = 1\}$. Probar que si n y m son coprimos, la función $f : G_n \times G_m \to G_{nm}$, $f(\alpha, \beta) = \alpha\beta$ es biyectiva.

5. Encontrar todos los enteros $0 \leq a \leq 2400$ que son divisibles por 8 y tales que su desarrollo en base 7 tiene al menos 3 dígitos iguales.