1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: LIBRETA:

Final de Álgebra 1, 14/12/2012

1. Sea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Determinar cuántas relaciones de equivalencia en A hay que tengan exactamente 2 clases de equivalencia. Determinar cuántas relaciones de equivalencia en A hay que tengan exactamente 3 clases de equivalencia.

2. Hallar el resto de la divisin de 2^{2^n} por 13 para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible, y $\alpha \in \mathbb{C}$ una raíz de $p(x)$. Probar que si $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ es un polinomio tal que $q(\alpha) = 0$ entonces $p(x) \mid q(x)$. Sugerencia: considerar $(p : q)$.

4. Hallar un polinomio de grado 2 en $\mathbb{Z}[x]$ mónico tal que

$$\begin{aligned} f(0) \equiv f(1) \equiv 0 \pmod 3, \\ f(0) \equiv f(2) \equiv 0 \pmod 5 \text{ y} \\ f(2) \equiv f(4) \equiv 0 \pmod 7. \end{aligned}$$

5. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos el grupo de raíces n-ésimas de la unidad G_n. Si $w \in G_n$, definimos su orden como

$$ord(w) = \min_{m \in \mathbb{N}} \{m \ : \ w^m = 1\}.$$

   Probar que $ord(w) \mid n$. Probar además que si $w \in G_n$ tiene orden k, entonces w es una raíz primitiva de orden k.