1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre: Libreta:

Final de Álgebra 1, 1/03/2013

1. Sean n, $m \in \mathbb{N}_0$. Probar que $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$.

2. Siguiendo la idea de Fermat, uno puede considerar los números $T_n = 3^{3^n} + 2$. Lamentablemente, esto rara vez da un número primo, como veremos a continuación:

   (a) Probar que si n es par entonces T_n es divisible por 5.

   (b) Probar que si $n \equiv 3 \pmod 4$ entonces T_n es divisible por 11.

3. Un número entero se dice *libre de cuadrados* si no es divisible por el cuadrado de ningún primo. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$, existen n naturales consecutivos tales que ninguno es libre de cuadrados.

4. Tomemos $\mathcal{A}$ un subconjunto de los números naturales, sobre el cual queremos definir una relación de equivalencia $\mathcal{P}$.

   (a) Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de los 10 primeros números naturales, o sea $\mathcal{A} = \{1, \ldots, 10\}$, ¿cuál es el número mínimo de elementos que puede tener $\mathcal{P}$ si queremos que haya dos clases de equivalencia?

   (b) Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de los primeros 7 números naturales, o sea $\mathcal{A} = \{1, \ldots, 7\}$, ¿cuál es el número máximo de elementos que puede tener $\mathcal{P}$ si queremos que haya tres clases de equivalencia?

5. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $\Phi_n \in \mathbb{C}[x]$ como el polinomio mónico que tiene como raíces simples a las raíces n-ésimas primitivas de la unidad. Por ejemplo $\Phi_4 = (x-i)(x+i) = x^2 + 1$.

   (a) Probar que si $k \mid n$ y $1 \leq k < n$ entonces $\Phi_n \mid \frac{x^n-1}{x^k-1}$.

   (b) Probar que si p, $q \in \mathbb{N}$ son primos distintos entonces $\Phi_{pq} = \frac{(x^{pq}-1)(x-1)}{(x^p-1)(x^q-1)}$.