1	2	3	4	5	6

Calif.

Apellido y Nombre:

Libreta: Turno: 11 a 14 14 a 17 20 a 22 **TEMA 1**

Algebra I - 2do Cuatrimestre 2012

1er Parcial (13/10/2012)

---

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$. Definimos en $\mathcal{P}(X)$ la relación $\mathfrak{R}$ de la siguiente forma:

$$A \,\mathfrak{R}\, B \iff \text{el conjunto } A \triangle B \text{ tiene a lo sumo 2 elementos.}$$

   (a) Determinar si $\mathfrak{R}$ es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica.

   (b) Si $A = \{1, 2\}$, calcular la cantidad de conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$tales que $A \,\mathfrak{R}\, B$.

---

2. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (3i + 1)2^{i-1} > n^3.$$

---

3. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 83 bolitas iguales en 5 casilleros numerados del 1 al 5 si en los casilleros pares debe haber una cantidad par de bolitas y en los impares una cantidad impar de bolitas?

---

4. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $(3 : n) = 1$, $(5n + 3^{n+1} : 4n - 3^n) = 1$ o 17.

---

5. Definimos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como: $a_1 = 14$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ para todo $n \geq 1$. Probar que la sucesión

$$b_n := \sqrt{3(a_n^2 - 4)},$$

satisface que b_n es entero y además divisible por 4 para todo $n \in \mathbb{N}$.

---

6. Se extraen dos números a y b; el número a se extrae del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y el número b del conjunto $\{1, \ldots, 15\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación de congruencia

$$ax \equiv b \pmod{15}$$

tenga al menos una solución? ¿Y de que tenga exactamente una solución módulo 15?

Justificar todas las respuestas