Topología

Segundo cuatrimestre - 2011

Práctica 9

Homología

---

1. Hallar todos los grupos abelianos posibles M en las siguientes sucesiones exactas:

   a) $0 \to \mathbb{Z}_2 \to M \to \mathbb{Z}_4 \to 0$

   b) $0 \to \mathbb{Z}_m \to M \to \mathbb{Z}_n \to 0$

   c) $0 \to Z_m \to M \to \mathbb{Z}^n \to 0$

2. (Lema de los 5) Dado el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & M_5 \arrow[d, "e"'] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

   Probar que

   a) Si b y d son mono y a es epi, entonces c es mono.

   b) Si b y d son epi y e es mono, entonces c es epi.

   c) Concluir que si a, b, d y e son iso, entonces c es iso.

3. Probar que una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$$

   induce una sucesión exacta larga de homología

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{f_n} H_n(B) \xrightarrow{g_n} H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_{n-1}} \dots$$

4. Sean (C_*, d) y (D_*, d') complejos. Probar que $(C_* \oplus D_*, d \oplus d')$ es un complejo y que

$$H_*(C \oplus D) = H_*(C) \oplus H_*(D).$$

5. Sea $m \in \mathbb{N}$. Calcular la homología del siguiente complejo de cadenas:

$$\dots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \dots \qquad d_{2n}(x) = 0 \quad d_{2n+1}(x) = mx$$

6. Probar que si A es un retracto de un espacio X, entonces $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es un monomorfismo para todo $n \geqslant 0$.

7. Sea $A \subset X$. Probar que $H_0(X, A) = 0$ si y sólo si A interseca todas las componentes arco conexas de X.

8. Probar que si A es un retracto por deformación débil de un espacio X entonces $H_n(X, A) = 0$ para todo $n \geqslant 0$.

9. Probar que si (X, A, B) es una terna con $B \subseteq A \subseteq X$, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

10. Probar que $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ es un grupo abeliano libre y calcular una base.

11. Versión fuerte de la Sucesión Exacta de Mayer-Vietoris. Probar que si un espacio X es unión de dos subespacios A y B tales que existen entornos U y V de A y B de modo que A es retracto por deformación débil de U, B es retracto por deformación débil de V y $A \cup B$ es retracto por deformación débil de $U \cup V$, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cap B) \to \ldots$$

    Sugerencia: por la demostración vista en la teórica basta ver que $H_n(C_*^{\{A,B\}}(X)) \to H_n(X)$ son isomorfismos.

12.
    a) Sea $\{X_i\}$ una familia finita de espacios topológicos y sea $x_i \in X_i$ tal que (X_i, x_i) es un par bueno. Si $X = \bigvee_i X_i$ es la unión de los espacios, identificando todos los puntos bases x_i, probar que $\tilde{H}_n(X) = \oplus_i \tilde{H}_n(X_i)$.
    b) Calcular $\tilde{H}_n(\bigvee_{i \in I} S^k)$.

13. Calcular los grupos de homología del círculo polaco.

14. Calcular los grupos de homología del plano proyectivo real.