Topología

Segundo cuatrimestre - 2011

Práctica 6

Homotopía y grupo fundamental

---

1. Probar que si $h, h' : X \to Y$ son homotópicas y $k, k' : Y \to Z$ son homotópicas, entonces $kh, k'h' : X \to Z$ son homotópicas.

2. Un espacio X se dice *contráctil* si la identidad $1_X : X \to X$ es homotópica a una función constante.

   (a) Probar que un espacio es contráctil si y sólo si es homotópicamente equivalente al singleton, el espacio de un punto.

   (b) Probar que si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces X es contráctil.
   Concluir que I y $\mathbb{R}$ son contráctiles.

   (c) Probar que si X es contráctil, entonces X es arcoconexo.

3. Sea $[X, Y]$ el conjunto de clases homotópicas de funciones continuas de X a Y.

   (a) Probar que si Y es contráctil entonces $[X, Y]$ tiene sólo un elemento.

   (b) Probar que $[*, Y] = \pi_0(Y)$ para todo espacio Y.

   (c) Probar que si X es contráctil e Y es arcoconexo, entonces $[X, Y]$ tiene sólo un elemento.

4. Probar que un retracto de un espacio contráctil es contráctil.

5. Sea G un grupo topológico y sea X un espacio. Probar que $[X, G]$ es un grupo con la operación $[f].[g] = [f.g]$, donde $(f.g)(x) = f(x).g(x)$.

6. Sean $f : X \to Y$ continua y Z otro espacio topológico. Definimos

$$f^* : [Y, Z] \to [X, Z], \quad f^*([g]) = [gf],$$

$$f_* : [Z, X] \to [Z, Y], \quad f_*([h]) = [fh].$$

   (a) Probar que f^* y f_* están bien definidas.

   (b) Probar que si $f \cong g$ entonces $f^* = g^*$ y $f_* = g_*$.

   (c) Deducir que si f es equivalencia homotópica entonces f^* y f_* son biyecciones.

7. Probar que una equivalencia homotópica induce una biyección en los π_0. Deducir que si dos espacios X e Y tienen el mismo tipo homotópico, entonces uno es arcoconexo si y sólo si el otro lo es. Probar también que X es conexo si y sólo si Y es conexo.

8. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Sea

$$\Omega X = \{\omega : I \to X \ , \ \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$$

con la topología del subespacio de la compacto abierta. Probar que

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega X).$$

9. Sea X espacio topológico, $x_0 \in X$ y sea $s \in S^1$ un punto cualquiera. Sea

$$[(S^1, s), (X, x_0)] = \{[f] / \, f : S^1 \to X \text{ continua tal que } f(s) = x_0\}$$

donde $[f] = [g]$ si $f \simeq g \text{ rel } \{s\}$. Probar que $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s), (X, x_0)]$.

10. Sean $x_0, x_1 \in X$ dos puntos en un espacio arcoconexo X. Probar que $\pi_1(X, x_0)$ es abeliano si y sólo si para todo par de caminos $x_0 \xrightarrow{\omega, \omega'} x_1$ se tiene $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$.

11. Sea $A \subset X$ y sea $r : X \to A$ una retracción. Dado $a \in A$, probar que

$$r_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$$

es suryectivo.

12. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio, y sea $f : A \to X$ una función continua. Probar que si f se extiende a una función $g : \mathbb{R}^n \to X$, entonces para todo $a \in A$ el morfismo $f_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, f(a))$ es el morfismo cero.

13. Sea G un grupo topológico con multiplicación $\cdot$ y elemento neutro x_0. Dados $f, g \in \Omega(G, x_0)$, definamos el lazo $f \odot g$ por $(f \odot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$.
    (a) Mostrar que $\Omega(G, x_0)$ es un grupo con la operación con $\odot$.
    (b) Mostrar que $\odot$ induce una nueva operación de grupo en $\pi_1(G, x_0)$, que por abuso notaremos $\odot$.
    (c) Probar que $\odot$ coincide con $\cdot$ en $\pi_1(G, x_0)$.
    (d) Deducir que $\pi_1(G, x_0)$ es abeliano.

14. Demostrar que si A es un retracto del disco D^2, entonces toda función continua $f : A \to A$ tiene un punto fijo.

15. Demostrar que si $f : S^1 \to S^1$ es null-homotópica, entonces tiene un punto fijo y además existe $x \in S^1$ tal que $f(x) = -x$.

16. Teorema de Lusternik-Schnirelmann (para dimensión 2). Probar que si S^2 se cubre con tres abiertos, entonces uno de ellos contiene dos puntos antipodales.

    Sugerencia: considerar el Teorema de Borsuk-Ulam.

17. Probar que si $f : S^2 \to S^2$ es continua y $f(x) \neq f(-x)$ para todo x, entonces f es sobreyectiva.