Topología

Segundo cuatrimestre - 2011

Práctica 5

Espacios de funciones

---

1. Sean X un espacio topológico e (Y,d) un espacio métrico.
   (a) Probar que en Y^X se tienen las siguientes inclusiones de topologías:
   $$\text{(uniforme)} \supset \text{(convergencia compacta)} \supset \text{(convergencia puntual)}$$
   (b) Probar que si X es compacto, entonces las dos primeras coinciden.
   (c) Probar que si X es discreto, entonces las dos últimas coinciden.
2. Decidir con cuáles de las topologías del ejercicio anterior la sucesión $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1/nx$, tiene límite.
3. Probar que (en general) el conjunto de funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$ no es cerrado en $\mathbb{R}^X$ con la topología de convergencia compacta.
4. Considere la sucesión de funciones $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$
   (a) Probar que f_n converge con la topología de convergencia compacta. Concluir que la función límite es continua.
   (b) Probar que f_n no converge con la topología uniforme.
5. Sea (Y,d) un espacio métrico, y sea X un espacio. Dada $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ y dada una función continua positiva $\delta : X \to \mathbb{R}_+$, sea
   $$B(f,\delta) = \{g \mid d(f(x),g(x)) < \delta(x) \text{ for all } x \in X\}$$
   (a) Probar que los conjuntos $B(f,\delta)$ forman una base para una topología en $\mathcal{C}(X,Y)$, a la que llamaremos *topología fina*.
   (b) Probar que la topología fina es más fina que la uniforme.
   (c) Probar que si X es compacto, entonces las topologías fina y uniforme coinciden.
   (d) Probar que si X es discreto, entonces $\mathcal{C}(X,Y) = Y^X$ y las topologías fina y caja coinciden.
6. Sea (Y,d) un espacio métrico, y sea X un k-espacio. Probar que $\mathcal{C}(X,Y)$ es cerrado en Y^X para la topología de convergencia compacta.
7. Probar que si Y es Hausdorff (resp. regular), entonces $\mathcal{C}(X,Y)$ es Hausdorff (resp. regular) con la topología compacto-abierta.
8. Sea A un subespacio de X. Probar que la restricción $r : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(A,Y)$ es continua si se considera ambos espacios con la topología compacto-abierta.

9. Sea Y localmente compacto y Hausdorff. Probar que la composición

$$\circ : \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)$$

es continua con la topología compacto-abierta.

10. Sea $\mathcal{T}$ una topología para $\mathcal{C}(X,Y)$. Probar que si la evaluación

$$e : \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$$

es continua, entonces $\mathcal{T}$ es más fina que la compacto-abierta.

11. Probar que si $p : E \to B$ es cociente y X es localmente compacto y Hausdorff, entonces $p \times id : E \times X \to B \times X$ es cociente.

Anillo de funciones

12. Sea X compacto y Hausdorff, y sea $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ el anillo de funciones reales con las operaciones punto a punto. Este ejercicio muestra que el anillo $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ caracteriza completamente al espacio X. Se define $H(X)$ como el conjunto de todos los morfismos de anillos $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, equipado con la topología de convergencia puntual.

    (a) Probar que si $I \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ es un ideal maximal, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $I = \{f \mid f(x_0) = 0\}$.

    (b) Probar que si $\omega \in H(X)$, entonces ω es suryectivo y satisface $\omega(\lambda u) = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, donde u es la unidad de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

    (c) Concluir que los únicos elementos de $H(X)$ son las evaluaciones ϵ_x, $x \in X$.

    (d) Sea $\epsilon : X \to H(X)$ dado por $\epsilon(x) = \epsilon_x$. Probar que ϵ es un homeomorfismo.