Topología

Segundo cuatrimestre - 2011

Práctica 4

Axiomas de separación y compacidad

Usaremos la siguiente nomenclatura: un espacio X se dice T_0 si para cada par de puntos distintos existe un abierto que contiene a uno solo de ellos. X es T_1 si para cualesquiera dos puntos $x_0, x_1 \in X$ existen abiertos U_0, U_1 tales que $x_i \in U_j$ si y sólo si $i = j$. Es T_2 (o *Hausdorff*) si dos puntos distintos cualesquiera tienen entornos disjuntos. X se dice *regular* si dados un punto x y un cerrado F en X tal que $x \notin F$, existen dos abiertos disjuntos, uno conteniendo a x y el otro a F. El espacio es T_3 si es regular y T_1. X es *completamente regular* si para todo cerrado F y todo punto $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to I = [0,1]$ tal que $f(F) = \{0\}$ y $f(x) = 1$. X es *Tychonoff* si es completamente regular y T_1. Diremos que X es *normal* si para cualesquiera dos cerrados disjuntos F_1 y F_2 existen dos abiertos disjuntos, uno conteniendo a F_1 y el otro a F_2. Finalmente, X se dice T_4 si es normal y T_1.

Axiomas de separación

1. Probar que si X es T_3, entonces dos puntos distintos cualesquiera de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

2. Probar que si X es T_4, entonces todo par de cerrados disjuntos de X admiten entornos cuyas clausuras son disjuntas.

3. Probar que un subespacio cerrado de un espacio T_4 es T_4.

4. Probar que si X tiene la topología del orden, entonces X es T_3.

5. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Probar que si $\prod X_\alpha$ es Hausdorff ó T_3 ó T_4, entonces también lo es cada X_α.

6. Sea X un conjunto y sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ topologías en X tales que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Suponiendo que X es Hausdorff (o T_3 o T_4) con una de estas topologías, decidir qué puede deducirse de X con la otra topología.

7. Sean $f, g : X \to Y$ continuas, Y Hausdorff. Probar que $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

8. Probar que si X es T_4 y conexo entonces tiene un solo punto o es no numerable.

9. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z, decimos que Y es retracto de Z si existe una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

   (a) Probar que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z, entonces Y es cerrado en Z.
   (b) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ con dos elementos. Probar que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Probar que S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. ¿Es S^1 un retracto de $\mathbb{R}^2$?

10. Probar que si Y es T_4 con base $\mathcal{B}$, entonces Y es subespacio de $[0,1]^J$ con $J \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

11. Probar que si $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}\}$ es una familia de funciones continuas que separa puntos de cerrados, entonces es inicial.

12. Probar que $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es T_4, pero es Tychonoff.

Compacidad

13. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X.
    (a) Probar que si $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ y X es compacto para $\mathcal{T}'$, entonces X también es compacto para $\mathcal{T}$.
    (b) Probar que si X es compacto y Hausdorff tanto para $\mathcal{T}$ como para $\mathcal{T}'$, entonces ambas topologías coinciden o no son comparables.
14. Probar que si X tiene la topología del complemento finito, entonces es compacto.
15. Decidir si $[0,1]$ es compacto para
    (a) la topología $\{U : [0,1] \setminus U$ es numerable o igual a $[0,1]\}$.
    (b) la topología de subespacio de $\mathbb{R}_l$.
16. Sea X Hausdorff y sean $A, B \subset X$ compactos y disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. En particular todo espacio compacto y Hausdorff es T_4.
17. Mostrar que si $f : X \to Y$ es continua, donde X es compacto e Y es Hausdorff, entonces f es cerrada.
18. Sea $f : X \to Y$, con Y compacto y Hausdorff. Probar que f es continua si y sólo si el gráfico de f definido por $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.
19. Sea $p : X \to Y$ suryectiva y cerrada. Probar que si Y es compacto y además $p^{-1}(y)$ es compacto para todo $y \in Y$, entonces X es compacto.
20. Sea X metrizable. Probar que son equivalentes:
    (a) X es acotado para toda métrica que induzca la topología de X.
    (b) Toda función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ es acotada.
    (c) X es compacto.
21. Considere el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{pb}"] & X \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \qquad P = X \times_Y Z$$

    Probar que si X y Z son compactos, e Y Hausdorff, entonces P es compacto.
    Hallar un ejemplo en el que Y no sea Hausdorff y P no sea compacto.
22. Sea $f : X \to Y$ suryectiva y propia. Probar que si X es Hausdorff, entonces Y también lo es.
23. Sea X Tychonoff. Sean A, B cerrados disjuntos de X. Probar que si A es compacto, entonces existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Compacidad local

24. Probar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.
25. Probar que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces es T_3.

26. Probar que $[0,1]^\omega$ no es localmente compacto con la topología uniforme.

27. Probar que si $\prod_{i\in I} X_i$ es localmente compacto, entonces cada X_i es localmente compacto y todos los X_i, salvo una cantidad finita, son compactos.

28. Probar que si X es localmente compacto y $f : X \to Y$ es abierta, entonces $f(X)$ también es localmente compacto.
    Hallar un ejemplo que muestre que la hipótesis f abierta es necesaria.

29. Probar que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces es Tychonoff.

Compactificación de Alexandroff

30. Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología subespacio de $\mathbb{R}$.

31. Usando la proyección estereográfica $p : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

    probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorafa a S^n.

32. Probar que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo de espacios de Hausdorff localmente compactos, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre sus compactificaciones a un punto.

Grupos topológicos

33. Probar que $(\mathbb{R}, +)$, $(S^1, \cdot)$ y $(GL(n,\mathbb{R}), \cdot)$ son grupos topológicos.

34. Probar que G es un grupo topológico si y sólo si la función $H : G \times G \to G$, $H(g,h) = g \cdot h^{-1}$ es continua.

35. Probar que para cada $a \in G$, las funciones $L_a : G \to G$ y $R_a : G \to G$, definidas por $L_a(g) = a \cdot g$, $R_a(g) = g \cdot a$ son homeomorfismos.

36. Sea G un grupo topológico, sea e el neutro de G y sea U abierto que contiene a e. Probar que existe V abierto que contiene a e tal que $V \cdot V \subset U$ y $V^{-1} \subset U$.

37. Probar que si un grupo topológico G es T_0, entonces es T_2.

38. Probar que si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces la clausura de H es también un subgrupo. Probar que si H es invariante, entonces su clausura también.

39. De los grupos topológicos $GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), O(n,\mathbb{R}), SO(n,\mathbb{R})$, decidir cuáles son compactos y cúales son conexos.