Topología

Segundo cuatrimestre - 2011
Práctica 1
Topologías

Ejemplos de topologías

1. Encuentre todas las topologías sobre conjuntos de a lo sumo cuatro elementos.

2. Sea X un conjunto.

   (a) Sea $\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Entonces τ es una topología sobre X, a la que llamamos la topología cofinita. Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a esta topología.

   (b) Sea κ un cardinal y sea

   $$\tau_\kappa = \{U \in \mathcal{P}(X) : X \setminus U \text{ tiene cardinal a lo sumo } \kappa\} \cup \{\emptyset\}$$

   Determine condiciones necesarias y suficientes sobre κ para que τ_κ sea una topología sobre X.

3. Sea X un conjunto no vacío y sea $x_0 \in X$.

   (a) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X.

   (b) $\{U \in \mathcal{P}(X) : x_0 \notin U\} \cup \{X\}$ es una topología sobre X.

   Describa el interior, la clausura y la frontera de los subconjuntos de X con respecto a cada una de estas topologías.

4. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Muestre que

   $$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

   es una topología sobre Y. Llamamos a τ_Y la *topología inducida* por τ sobre Y o la *topología subespacio*.

5. Sea X un conjunto infinito, sea $x_0 \in X$ y sea $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X que tienen complemento finito o que no contienen a x_0. Muestre que τ es una topología y describa sus cerrados.

6. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los cerrados acotados de $\mathbb{R}$ en su topología usual, junto con $\mathbb{R}$. Entonces existe una topología en $\mathbb{R}$ para la cual $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los cerrados.

7. Digamos que un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ es radialmente abierto si su intersección con toda recta que pasa por uno de sus puntos es un abierto de ésta. Muestre que el conjunto de todos los conjuntos radialmente abiertos de $\mathbb{R}^2$ es una topología sobre $\mathbb{R}^2$ y compárela con la topología usual

Clausura, interior, frontera

8. Sea X un espacio topológico y sean A, $B \subseteq X$. Entonces:

(a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(c) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;
(d) $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ cuando A es abierto;
(e) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.
(f) $\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$

¿Pueden ser estrictas las inclusiónes?

9. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces

(a) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ y
(b) $\operatorname{int} \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \operatorname{int} A$.

¿Pueden ser estrictas las inclusiones?

10. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces:

(a) $\operatorname{int}(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$;
(b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{int} A$.

11. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces:

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$;
(b) $X \setminus \partial A = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int}(X \setminus A)$;
(c) $\overline{A} = A \cup \partial A$;
(d) $\operatorname{int} A = A \setminus \partial A$;
(e) A es abierto sii $A \cap \partial A = \emptyset$; y
(f) A es cerrado sii $\partial A \subseteq A$.

12. Considere el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico y determine la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de X.

(a) $\{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$,
(b) $\{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\}$,
(c) $\{(x, 0) : 0 < x < 1\}$,
(d) $\{(x, 1/2) : 0 < x < 1\}$,
(e) $\{(1/2, y) : 0 < y < 1\}$.

13. * Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. ¿Cuántos subconjuntos de X pueden obtenerse a partir de A usando las operaciones de tomar interior, tomar clausura y tomar complemento?

14. Todo cerrado de $\mathbb{R}^2$ es la frontera de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Definiciones equivalentes

15. Sea X un conjunto. Un *sistema de filtros de entornos $\mathcal{F}$ en X* es una regla que a cada elemento $x \in X$ asigna una familia $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ de manera que

(A1) si $x \in X$, $\mathcal{F}_x \neq \emptyset$;

(A2) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces $x \in A$;

(A3) si $x \in X$, $A \in \mathcal{F}_x$ y $B \in \mathcal{P}(X)$ son tales que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}_x$;

(A4) si $x \in X$ y A, $B \in \mathcal{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_x$;

(A5) si $x \in X$ y $A \in \mathcal{F}_x$, entonces existe $B \in \mathcal{F}_x$ tal que $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{F}_y$ para todo $y \in B$.

Probar que

(a) Si (X, τ) es un espacio topológico y para cada $x \in X$ definimos

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{existe } U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\},$$

entonces $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X.

(b) Si $\mathcal{F}$ es un sistema de filtros de entornos en X y definimos

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \text{para todo } x \in A \text{ es } A \in \mathcal{F}_x\} \cup \{\emptyset\},$$

entonces τ es una topología sobre X.

(c) Las construcciones del item 1 y del item 2 son inversas.

16. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Si $p = (x, y) \in X$ con $y > 0$, sea

$$\mathcal{F}_p = \{B_r(p) : 0 < r < y\}$$

y si, en cambio $p = (x, 0)$, sea

$$\mathcal{F}_p = \{B_r(x, r) \cup \{p\} : 0 < r\}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ genera un sistema de filtros de entornos en X. Si τ es la topología correspondiente, (X, τ) se llama *plano de Moore*. Describa las clausuras y los interiores de los subconjuntos de X.

17. Sea X un conjunto. Una función $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un *operador de clausura en* X si

(A1) $c(\emptyset) = \emptyset$;

(A2) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $A \subseteq c(A)$;

(A3) si $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(c(A)) = c(A)$;

(A4) si A, $B \in \mathcal{P}(X)$, entonces $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$;

Probar que

(a) Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$$

es un operador de clausura en X.

(b) Si $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador de clausura en X, entonces el conjunto

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : c(X \setminus U) = X \setminus U\}$$

es una topología sobre X.

(c) Las construcciones del item 1 y del item 2 son inversas.

18. Sea X un conjunto y sea $B \subseteq X$. Entonces la función

$$c : A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A = \emptyset \\ A \cup B \in \mathcal{P}(X) & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

es un operador de clausura en X. Describa los abiertos de la topología correspondiente.

19. Encuentre una descripción como la del ejercicio 17 para topologías sobre un conjunto X basada en un *operador de interior* $i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$.

Bases y subbases

20. Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de topologías en X. Probar que $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X?

21. Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Probar que existe una topología $\sigma(\mathcal{A})$ sobre X que cumple que

    - todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para $\sigma(\mathcal{A})$, y
    - si τ es una topología sobre X tal que todo elemento de $\mathcal{A}$ es abierto para τ, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.

    En otras palabras, $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología menos fina que contiene a $\mathcal{A}$ (la mínima en el orden dado por la inclusión). La topología $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología generada por $\mathcal{A}$.

22. Describa la topología generada por $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ sobre el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$.

23. Sea $K = \{1/n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ y consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}, \\ \mathcal{B}_3 &= \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}, \\ \mathcal{B}_4 &= \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : B \in \mathcal{B}_1\}, \\ \mathcal{B}_5 &= \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{B}_6 &= \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{B}_7 &= \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}. \end{aligned}$$

    (a) Muestre que cada uno de $\mathcal{B}_1$, ..., $\mathcal{B}_7$ es una base para una topología en $\mathbb{R}$ y compare las topologías correspondientes.
    (b) Muestre que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una subbase para la topología generada por $\mathcal{B}_1$.
    (c) Determinar la clausura del conjunto K en cada una de las siete topologías.

24. Sea $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\} \cup \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Muestre que $\mathcal{B}$ es base de una topología sobre $\mathbb{R}$. Describa el interior de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con respecto a ella.

Redes

25. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

    (a) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a la constante.

(b) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

(c) Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

(d) Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k\in\Gamma_\alpha}$ que converge a $x^\alpha \in X$, y que además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \ \forall\beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x.

26. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que

$$\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset A, \text{ y } x_\alpha \to x\}$$

27. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathscr{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.

Cerrados irreducibles y espacios noetherianos

28. Sea X un espacio topológico. Decimos que un conjunto cerrado $F \subseteq X$ es *irreducible* si siempre que $F = F_1 \cup F_2$, con F_1 y F_2 subconjuntos cerrados de X, se tiene que $F_1 = F$ ó $F_2 = F$.

(a) Si la topología de X es la topología cofinita de X y X es infinito, entonces X es irreducible.

(b) Sea A un anillo conmutativo. Probar que el conjunto de ideales primos de A, junto con A, es subbase de una topología en (el conjunto subyacente de) A y que los complementos de los ideales primos son cerrados irreducibles para esa topología.

(c) Si X es irreducible y $U \subseteq X$ es abierto y no vacío, entonces U es denso en X.

29. Decimos que un espacio topológico X es *noetheriano* si siempre que tenemos una sucesión decreciente de cerrados

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_i \supseteq F_{i+1} \supseteq \cdots$$

existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_i = F_{i_0}$ para todo $i \geq i_0$.

Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X es noetheriano.

(b) Toda familia no vacía de cerrados de X tiene un elemento minimal.

(c) Si

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_i \subseteq U_{i+1} \subseteq \cdots$$

es una sucesión creciente de abiertos de X, entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_i = U_{i_0}$ para todo $i \geq i_0$.

(d) Toda familia no vacía de abiertos de X tiene un elemento maximal.

30. Sea X un espacio topológico noetheriano.

(a) Si $F \subseteq X$ es cerrado, existen $n \in \mathbb{N}$ y cerrados irreducibles $F_1, \ldots, F_n \subseteq X$ tales que $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$.

(b) Si n, $m \in \mathbb{N}$ y $F_1, \ldots, F_n$, $F'_1, \ldots, F'_m \subseteq X$ son cerrados irreducibles tales que

- $F_i \not\subseteq F_j$ si i, $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $i \neq j$;
- $F'_i \not\subseteq F'_j$ si i, $j \in \{1, \ldots, m\}$ y $i \neq j$; y
- $F_1 \cup \cdots \cup F_n = F'_1 \cup \cdots \cup F'_m$,

entonces $n = m$ y existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $F'_i = F_{\sigma(i)}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.