Teoría de Números - Práctica 5

2do. Cuatrimestre 2011

Completaciones, Ideles, Adeles.

1. Probar que si $|.| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ cumple que $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$ entonces son equivalentes:

   - $|1 + x| \leq 2$ si $|x| \leq 1$.
   - $|x + y| \leq |x| + |y|$.

   Sugerencia: Probar primero que si $x_1, \dots, x_n \in K$ entonces $|x_1 + \ldots + x_n| \leq 2n.\max\{|x_i|\}$. Deducir que $|x + y|^n \leq 4(n + 1)(|x| + |y|)^n$.

2. Probar que si $|.|$ es un valor absoluto no arquimedeano entonces $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$ siempre que $|x| \neq |y|$.

3. (Teorema de aproximación multiplicativa) Probar que si $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_n$ son primos distintos de K y $x_i \in K_{\mathfrak{p}_i}^{\times}$ entonces existe $x \in K^{\times}$ tal que:

   $$xx_i^{-1} = 1 \, (\text{mod } \mathfrak{p}_i^{a_i})$$

   donde los a_i son numeros naturales previamente elegidos.

4. Sea $p \in \mathbb{Q}$ un primo. Caracterizar $\mathbb{Q}_p^{\times}/(\mathbb{Q}_p^{\times})^2$.

5. Sea v un valor absoluto no arquimedeano, K_v la respectiva completacion y definamos

   $$\widehat{\mathcal{O}_v} = \{x \in K_v : \ |x|_v \leq 1\}$$
   $$\widehat{\mathfrak{p}_v} = \{x \in K_v : \ |x|_v < 1\}$$
   $$\widehat{U_v} = \{x \in K_v : \ |x|_v = 1\}$$

   Probar que: $\widehat{U_v} = \widehat{\mathcal{O}_v}^{\times}$, $\widehat{\mathfrak{p}_v}$ es el unico ideal primo de $\widehat{\mathcal{O}_v}$ y que cada conjunto es la completacion del respectivo subconjunto de K sin sombrero.

6. Sea v una valuacion no arquimedeana de un cuerpo K y K_v la respectiva completacion. Probar que $\mathcal{O}_v$ es precisamente el conjunto de enteros de K_v respecto de $\mathbb{Z}_p$, esto es el conjunto de elementos de K_v cuyo polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}_p$ tiene coeficientes en $\mathbb{Z}_p$.

7. Consideremos una valuacion no arquimedeana v en un cuerpo de numeros K. Sea K_v la completacion y π_v un elemento de $\mathfrak{p}_v$ que no esta en $\mathfrak{p}_v^2$. Sea ademas $\mathcal{P}$ un conjunto de representantes de $\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$. Entonces todo elemento de K_v se escribe como:

$$\alpha = \sum_{j=-N}^{\infty} a_j \pi_v^j$$

con $a_j \in \mathcal{P}$ y N entero positivo.

8. Probar que el modulo $|.| : \mathbb{I}_K \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ es un morfismo continuo. Aqui $|(\alpha_v)_v| = \prod |\alpha_v|_v$.