# Teoría de Números - Práctica 2

2do. Cuatrimestre 2011

Ideales y factorización.

Por $K$ denotaremos un cuerpo de números. Dado un cuerpo $K$, su anillo de enteros sera denotado $\mathcal{O}_K$.

1. Sea $K$ un cuerpo de números, $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros y $I$ un ideal fraccionario no nulo. Sea $J := \{\alpha \in K \,:\, \alpha I \subset \mathcal{O}_K\}$. Probar que $IJ = \mathcal{O}_K$. Deducir que $J = I^{-1}$.

2. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathcal{O}_K$. Probar que:
   - $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{a}$ y $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) \mid \mathcal{N}(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathfrak{a}$. En particular $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) \mid \gcd\{\mathcal{N}(\alpha) \,:\, \alpha \in \mathfrak{a}\}$.
   - Probar que en realidad $\mathcal{N}(\mathfrak{a}) = \gcd\{\mathcal{N}(\alpha) \,:\, \alpha \in \mathfrak{a}\}$.

3. Sea $\mathfrak{a}$ el ideal $\mathfrak{a} = \langle 2, 1+\sqrt{-3}\rangle$ en el anillo $R = \left\{a + b\sqrt{-3} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Probar que $\mathfrak{a} \neq \langle 2\rangle$, pero $\mathfrak{a}^2 = 2\mathfrak{a}$. Concluir que $R$ no tiene factorización única en ideales (más aún, $\mathfrak{a}$ es el único ideal primo que contiene a $\langle 2\rangle$, con lo cual $\langle 2\rangle$ no tiene factorización en ideales primos). ¿Contradice esto el teorema de factorización única demostrado?

4. Sea $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$.
   - Probar que $\mathcal{O}_K$ es un Dominio Integro Principal (DIP).
   - Hallas TODAS las soluciones enteras de la ecuación $y^2 + 2 = x^3$.

5.
   - Probar que el ideal $\langle 2, x\rangle$ en $\mathbb{Z}[x]$ no es principal.
   - Supongamos que $f \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio irreducible. Probar que si $f \mid gh$ en $\mathbb{Z}[x]$ entonces $f \mid g$ ó $f \mid h$. Deducir que $\mathbb{Z}[x]$ es un DFU. (Hint: mirar que pasa en $\mathbb{Q}[x]$ y usar una especie de "Lema de Gauss").
   - ¿Quienes son los ideales primos de $\mathbb{Z}[x]$?

6. Probar que $\mathbb{Q}[x]$ (respectivamete $\mathbb{C}[x]$) es un dominio de Dedekind. Esto justifica el ejemplo de la teórica de la extensión $\mathbb{Q}[x,y]/\big\langle y^2 - x\big\rangle$ sobre $\mathbb{Q}[x]$.

7. Probar que en un Dominio de Dedekind es equivalente ser DIP (i.e. que todos los ideales sean principales) a ser un DFU.

8. Sea $I$ un ideal en un dominio de Dedekind y $\alpha \in I$ un elemento distinto de cero. Probar que existe $\beta$ tal que $I = \langle \alpha, \beta\rangle$.

9. Sea $R$ un dominio de Dedekind y $K$ su cuerpo de fracciones. Supongamos además que $K$ tiene característica cero. Probar que si $L/K$ es una extensión finita de $K$ y $S$ es la clausura entera de $R$ en $L$ entonces $S$ es un dominio de Dedekind.

**Adicional**: recordar que un Dominio Eucídeo es un par $(R, \nu)$ donde $R$ es un Dominio Integro y

$$\nu : R \backslash \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

satisface $\nu(ab) \geq \nu(a)$ y además dados $a, b \in R$ no nulos, existen (únicos) $q, r \in R$ tales que

$$b = aq + r \qquad \text{con } r = 0 \text{ ó } \nu(r) < \nu(a)$$

Ejemplos de Dominios Euclídeos son $(\mathbb{Z}, |\,|)$, $(\mathbb{Q}[x], \text{grado})$. Probar que si $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ entonces $\mathcal{O}_K$ es un Dominio Euclídeo.