Departamento de Matemática – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – Universidad de Buenos Aires

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B)

Segundo cuatrimestre 2011

Práctica 8 - Matrices estocásticas y procesos de Markov

1. Determinar cuáles de las siguientes matrices son estocásticas o de Markov.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0{,}5 \\ -\frac{1}{2} & 0{,}5 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

2. Sea $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ la matriz de transición de un proceso de Markov y sea $V(2)^t = (\frac{7}{18}, \frac{11}{18})$ el segundo estado. Verificar que M es inversible y calcular $V(0)$ y $V(1)$.

3. Se tiene un proceso de Markov cuya matriz de transición es $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$.

   Verificar que el vector $V^t = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ es un estado de equilibrio del proceso.

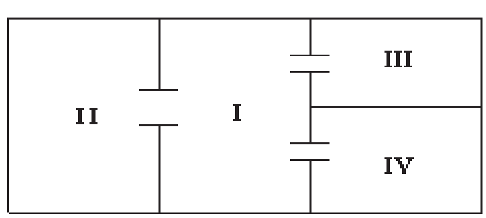
4. La población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores. Esta población es constante y se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 75 % de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 10 especímenes que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene.

   a) Determinar la matriz y el estado inicial que rigen el proceso.

   b) Calcular los 5 primeros estados del proceso de Markov.

   c) Verificar que el vector $V^t = (\frac{2}{17}, \frac{15}{17})$ es estado de equilibrio.

5. En el instante inicial 21 ratones se encuentran en la casilla I (ver diagrama). Se supone que nada distingue un compartimento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquiera de las casillas adyacentes o se quede en la casilla en la que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el nuevo estado.



   a) Determinar la matriz de transición del proceso.

   b) Determinar el vector de estado después de 4 horas.

   c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio.

6. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$M = \begin{pmatrix} a & a+\frac{1}{10} & b+\frac{1}{10} \\ b & a & 2a \\ b & b+\frac{1}{10} & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$

   a) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales M resulta ser una matriz de Markov.

   b) Para los valores de a y b hallados, decidir si hay dos vectores de equilibrio de M que sean linealmente independientes. En caso afirmativo, hallarlos.

   c) Para los valores a y b hallados, verificar que M^t es también una matriz de Markov. ¿Es casualidad o una ley general?

7. Un país, cuya población es constante está dividido en dos regiones. Cada año 1 de cada 10 residentes de la región A se traslada a la región B mientras que 1 de cada 5 habitantes de la zona B se muda a la región A. En el instante inicial (ahora) viven 6 millones en la región A y 30 millones en la B.

   a) Escribir la matriz de transición para este proceso.

   b) Determinar si existe un estado de equilibrio.

   c) Calcular el estado de la población dentro de 10 años y dentro de 30 años.

8. Un proceso de Markov admite 3 estadios o sectores: α, β y γ. La probabilidad de pasar del estadio α a cada uno de los otros sectores es $\frac{1}{2}$. Un individuo que está en el estadio β tiene probabilidad $\frac{1}{3}$ de pasar al α y lo mismo sucede para transitar del β al γ. Los individuos en el estadio γ tienen probabilidad 1 de pasar al α en el período siguiente.

   a) Armar la matriz de transición A de este proceso.

   b) Si el estado actual está dado por $V^t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, determinar el estado siguiente.

   c) Analizar el comportamiento de A^n para valores de n grandes.

   d) Decidir si existe un estado límite.

9. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz que define un proceso de Markov de la que se sabe que:

   • $m_{12} = m_{13} = 0$ y $m_{22} + m_{23} = \frac{9}{10}$, • $\mathrm{tr}(M) = \frac{5}{2}$ y • $\det(M) = \frac{1}{2}$.

   a) Hallar todos los autovalores de M.

   b) Sabiendo que el vector $(1, 2, 3)$ resulta estado límite del proceso para cierto vector de estado inicial, hallar la matriz M.

   c) Decidir si hay dos vectores linealmente independientes que sean estados de equilibrio.

   d) Determinar si existe M_∞.

10. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en tres sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100 % de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100 % de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 1, mientras que la población del Sector 3 permanece (sin desplazarse) en su sector. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.

    a) Determinar la matriz de transición A que describe el proceso.

    b) Decidir si hay dos estados de equilibrio que sean linealmente independientes.

c) Determinar si el proceso tiene un estado límite, y en caso afirmativo hallarlo, con una población inicial de:

1) 200 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.
2) 100 habitantes en el Sector 1, 200 en el Sector 2 y 300 en el Sector 3.

d) Determinar si existe A_∞. Justificar.

11. La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en cuatro sectores. Día a día se observan los desplazamientos: el 100 % de la población del Sector 1 se desplaza al Sector 2, el 100 % de la población del Sector 2 se ha desplaza al Sector 3, el 100 % de la población del Sector 3 se ha desplaza al Sector 4 y el 100 % de la población del Sector 4 se ha desplaza al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene en el tiempo.

    a) Determinar la matriz de transición A que describe el proceso.

    b) Decidir si hay dos estados de equilibrio que sean linealmente independientes.

    c) Determinar si el proceso tiene un estado límite, y en caso afirmativo hallarlo, con una población inicial de:

    1) 100 habitantes en cada Sector.
    2) 100 habitantes en el Sector 1, 300 en el Sector 2, 100 en el Sector 3 y 300 en el Sector 4.

    d) Decidir si existe A_∞ (Sugerencia: calcular A^4).

12. Dada la matriz de Markov $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $B = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}A^2$.

    a) Hallar todos los estados de equilibrio de A.

    b) Probar que B es una matriz de Markov. Decidir si hay dos estados de equilibrio linealmente independientes para la matriz B.

    c) Dado $v(0) = (2, 1, 3)$ un vector de estado inicial, decidir si existe estado límite para el proceso de Markov generado por la matriz A.

    d) Dado $v(0) = (2, 1, 3)$ un vector de estado inicial, decidir si existe estado límite para el proceso de Markov generado por la matriz B.

13. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & a & a & 1/4 \\ 0 & c & c & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ una matriz de Markov, tal que $v = (1/2, 1/4, 1/4, 0)$ es un estado de equilibrio.

    a) Determinar la matriz M y, si es posible, un vector de probabilidad $w \neq v$ que sea también vector de equilibrio.

    b) Determinar el estado límite (si existe) para el estado inicial $(0, 0, 0, 1)$.