Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Interpolación de Marcinkiewicz

Sea f una función medible en $\mathbb{R}^n$, definimos la función $m_f(t) = |E_f(t)|$, donde

$$E_f(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}$$

m_f está definida en $[0, +\infty]$ es no negativa y no creciente. Se prueba que para $1 \leq p < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx = p \int_0^\infty t^{p-1} m_f(t) \, dt$$

y $\|f\|_{L^\infty} = \sup\{t \geq 0 : m_f(t) > 0\}$.

Lema 1.1. *Si* $|f| \leq |g| + |h|$, *entonces* $m_f(t) \leq m_g(t/2) + m_h(t/2)$

Demostración. Usando que $E_f(t) \subset E_g(t/2) \cup E_h(t/2)$, se obtiene el resultado. □

Lema 1.2 (Chebyshev). *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $m_f(t) \leq \|f\|_{L^p}^p t^{-p}$.

Demostración.

$$t^p m_f(t) \leq \int_{E_f(t)} |f(x)|^p \, dx \leq \|f\|_{L^p}^p \square$$

Si f es una función medible en $\mathbb{R}^n$, decimos $f \in L^{p,w}(\mathbb{R}^n)$ si existe $C > 0$ tal que $m_f(t) \leq C^p t^{-p}$, denominamos $C_f = \sup\limits_{t \geq 0} (t^p \, m_f(t))^{1/p}$

Proposición 1.1. *Sea* $1 < p \leq \infty$, $f \in L^{p,w}(\mathbb{R}^n)$ *si y sólo si*

$$\|f\|_{L^{p,w}} = \sup_{0<|E|<\infty} |E|^{\frac{1}{p}-1} \int_E |f(x)| \, dx < \infty$$

Proposición 1.2. *Sean* $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$*, si* $f \in L^{p_0,w}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1,w}(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $p_0 < p < p_1$ *y se verifica*

$$\|f\|_{L^p} \leq C(p_0, p_1, \theta)\, C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}$$

donde $C(p_0, p_1, \theta) = \frac{\theta p_0 + (1-\theta) p_1}{\theta(1-\theta)(p_1 - p_0)}$*,* $C_j = \sup_{t \geq 0} \left(t^{p_j}\, m_f(t)\right)^{1/p_j}$ *y* $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned} p\int_0^{\infty} t^{p-1} m_f(t)\, dt =& p\int_0^{\lambda} t^{p-1} m_f(t)\, dt + p\int_{\lambda}^{\infty} t^{p-1} m_f(t)\, dt \\ \leq& p\, C_0^{p_0} \int_0^{\lambda} t^{p-p_0-1} dt + p\, C_1^{p_1} \int_{\lambda}^{\infty} t^{p-p_1-1} dt \\ =& \frac{p}{p-p_0} C_0^{p_0} \lambda^{p-p_0} + \frac{p}{p_1 - p} C_1^{p_1} \lambda^{p-p_1}. \end{aligned}$$

Aomando $\lambda = \left(C_1^{p_1} C_0^{-p_0}\right)^{\frac{1}{p_1 - p_0}}$, obtenemos

$$\|f\|_{L^p}^p \leq \frac{p(p_1 - p_0)}{(p - p_0)(p_1 - p)} C_0^{(1-\theta)p} C_1^{\theta p},$$

lo que implica el resultado. □

Lema 1.3. *Sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $\lambda > 0$*, si* g *está dada por* $g = f\left(1 - \chi_{E_{f,\lambda}}\right)$*, entonces para* $p_1 > p$ *vale* $g \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\|g\|_{L^{p_1}}^{p_1} = p_1 \int_0^{\lambda} t^{p_1 - 1} m_f(t)\, dt - \lambda^{p_1} m_f(\lambda). \tag{1.1}$$

Demostración. Usando que $m_g(t) = m_f(t) - m_f(\lambda)$ si $t \leq \lambda$ y $m_g(t) = 0$ si $t > \lambda$, se obtiene (1.1). Vemos que

$$\|g\|_{L^{p_1}}^{p_1} \leq p_1 \lambda^{p_1 - p} \int_0^{\lambda} t^{p-1} m_f(t)\, dt = \frac{p_1}{p} \lambda^{p_1 - p} \|f\|_{L^p}^p$$

lo que prueba $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 1.4. *Sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $\lambda > 0$*, si* h *está dada por* $h = f\chi_{E_{f,\lambda}}$*, entonces para* $1 \leq p_0 < p$ *vale* $h \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\|h\|_{L^{p_0}}^{p_0} = p_0 \int_{\lambda}^{\infty} t^{p_0 - 1} m_f(t)\, dt + \lambda^{p_0} m_f(\lambda). \tag{1.2}$$

Demostración. Dado que $m_h(t) = m_f(\lambda)$ si $t \leq \lambda$ y $m_h(t) = m_f(t)$ si $t > \lambda$, se verifica (1.2). Por lo tanto

$$\|h\|_{L^{p_0}}^{p_0} \leq \lambda^{p_0-p}\left(\lambda^p m_f(\lambda) + p_0\int_\lambda^\infty t^{p-1}m_f(t)\,dt\right) \leq \frac{p+p_0}{p}\lambda^{p_0-p}\|f\|_{L^p}^p,$$

lo que prueba el resultado. □

Teorema 1.1 (Marcinkiewicz)**.** *Sean $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, si el operador lineal $A : L^{p_j}(\mathbb{R}^n) \to L^{p_j,w}(\mathbb{R}^n)$, $j = 0, 1$, es continuo, entonces para $\theta \in (0,1)$ y $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ vale*

$$\|Af\|_{L^p} \leq C_\theta \|f\|_{L^p},$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

Demostración. Tomemos $p_0 < p_1$, si $f = f(1-\chi_{E_f(\lambda)}) + f\chi_{E_f(\lambda)} = g + h$, tenemos $Af = Ag + Ah$ y por lo tanto $m_{Af}(t) \leq m_{Ag}(t/2) + m_{Ah}(t/2)$. Vale entonces para $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
t^{p-1}m_{Af}(t) \leq& C\left(\|g\|_{L^{p_1}}^{p_1} t^{p-p_1-1} + \|h\|_{L^{p_0}}^{p_0} t^{p-p_0-1}\right)\\
\leq& C\Big(t^{p-p_1-1}\int_0^\lambda s^{p_1-1}m_f(s)\,ds + t^{p-p_0-1}\int_\lambda^\infty s^{p_0-1}m_f(s)\,ds\\
&+t^{p-p_0-1}\lambda^{p_0}m_f(\lambda)\Big)
\end{aligned}$$

Como $m_f(t)$ y $m_{Af}(t)$ no dependen de la elección de $\lambda > 0$, podemos tomar $\lambda = t$. Por lo tanto $t^{p-p_0-1}\lambda^{p_0}m_f(\lambda) = t^{p-1}m_f(t)$ y se verifica

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_0^t t^{p-p_1-1}s^{p_1-1}m_f(s)\,dsdt =& \int_0^\infty s^{p_1-1}m_f(s)\int_s^\infty t^{p-p_1-1}dtds\\
=& C\int_0^\infty s^{p-1}m_f(s)\,ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_t^\infty t^{p-p_0-1}s^{p_0-1}m_f(s)\,dsdt =& \int_0^\infty\int_0^s s^{p_0-1}m_f(s)\,t^{p-p_0-1}dtds\\
=& C\int_0^\infty s^{p-1}m_f(s)\,ds
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|Af\|_{L^p}^p = \int_0^\infty t^{p-1}m_{Af}(t)\,dt \leq C\int_0^\infty t^{p-1}m_{Af}(t)\,dt = C\|f\|_{L^p}^p$$

lo que prueba el resultado. □

1.2. Teorema de Riesz-Thorin

Lema 1.5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función medible, existen $f^{(\nu)} \geq 0$ medibles que verifican $f = \sum_{0\leq\nu\leq 3} i^\nu f^{(\nu)}$. Además, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f^{(\nu)} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y vale*

$$\|f\|_{L^p} \leq \sum_{0\leq\nu\leq 3} \left\|f^{(\nu)}\right\|_{L^p} \leq 2\,\|f\|_{L^p}.$$

Demostración. Sean $A_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{Re}\,(i^{-\nu} f(x)) > 0\}$, si definimos las funciones $f^{(\nu)} = \mathrm{Re}\,(i^{-\nu} f(x))\,\chi_{A_\nu}$, es fácil ver que $f^{(\nu)} \geq 0$ y $f = \sum_{0\leq\nu\leq 3} i^\nu f^{(\nu)}$. Por la desigualdad triangular vale $\|f\|_{L^p} \leq \sum_{0\leq\nu\leq 3} \left\|f^{(\nu)}\right\|_{L^p}$ y usando que

$$\sum_{0\leq\nu\leq 3} \left|f^{(\nu)}\right|^p \leq \left(\sum_{0\leq\nu\leq 3} \left|f^{(\nu)}\right|\right)^p \leq 2^p\,|f|^p$$

obtenemos la otra desigualdad. □

Corolario 1.1. *Sea A un operador lineal definido sobre las funciones simples, si existe $C > 0$ tal que*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} (Af)(x)\, g(x)\, dx\right| \leq C\,\|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{q'}} \tag{1.3}$$

para $f, g \geq 0$ funciones simples, donde $1 \leq p, q' \leq \infty$, entonces A se extiende a un operador lineal continuo $A : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Demostración. Dadas f, g simples, por el lema anterior existen $f^{(\nu)}$ y $g^{(\eta)}$ no negativas tales que $f = \sum_{0\leq\nu\leq 3} i^\nu f^{(\nu)}$, $g = \sum_{0\leq\eta\leq 3} i^\eta g^{(\eta)}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} (Af)(x)\, g(x)\, dx\right| &\leq \sum_{\substack{0\leq\nu\leq 3\\0\leq\eta\leq 3}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(Af^{(\nu)}\right)(x)\, g^{(\eta)}(x)\, dx\right| \\ &\leq C \sum_{\substack{0\leq\nu\leq 3\\0\leq\eta\leq 3}} \left\|f^{(\nu)}\right\|_{L^p} \left\|g^{(\eta)}\right\|_{L^{q'}} \leq 4C\,\|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{q'}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la desigualdad vale para las funciones simples y por densidad $\|Af\|_{L^q} \leq C\,\|f\|_{L^p}$. □

Lema 1.6. *Sea* $B = \{\zeta \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(\zeta) < 1\}$*, si* F *es holomorfa en* B*, continua y acotada en* $\overline{B}$*, entonces* $|F(\theta)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$*, con* $M_j = \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} |F(j + i\gamma)|$*.*

Demostración. Podemos asumir que $M_j > 0$, en caso contrario se podría extender, por el principio de simetría de Schwarz, F a una banda simétrica respecto al eje $\operatorname{Im}(\zeta) = j$, siendo nula sobre esta recta sería identicamente nula. Consideramos $G(\zeta) = e^{\varepsilon(\zeta^2 - 1)} F(\zeta) M_0^{\zeta - 1} M_1^{-\zeta}$ con $\varepsilon > 0$, tenemos

$$|G(\theta + i\gamma)| \leq e^{\varepsilon(\theta^2 - \gamma^2 - 1)} |F(\theta + i\gamma)| M_0^{\theta - 1} M_1^{-\theta}$$

Si tomamos un rectángulo $Q = \{\zeta \in B : -r < \operatorname{Im}(\zeta) < r\}$ con $r > 0$ suficientemente grande, tenemos $\sup_{\zeta \in \partial Q} |G(\zeta)| \leq 1$, por el principio del módulo máximo

$$|G(\theta)| = e^{\varepsilon(\theta^2 - 1)} |F(\theta)| M_0^{\theta - 1} M_1^{-\theta} < 1.$$

Como ε es arbitrario, obtenemos la desigualdad. □

Teorema 1.2. *Sean* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$*, si* $A : L^{p_j}(\mathbb{R}^n) \to L^{q_j}(\mathbb{R}^n)$ *es lineal y continuo, entonces para* $\theta \in (0,1)$ *y* $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *vale*

$$\|Af\|_{L^q} \leq C \|A\|_0^{1-\theta} \|A\|_1^{\theta} \|f\|_{L^p},$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ *y* $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ *y* $\|A\|_j = \|A\|_{\mathcal{B}\left(L^{p_j}, L^{q_j}\right)}$*.*

Demostración. Sean $f, g \geq 0$ funciones simples dadas por $f = \sum_{1 \leq j \leq k} a_j \chi_{A_j}$, $g = \sum_{1 \leq l \leq m} b_l \chi_{B_l}$, con $a_j, b_l > 0$ y A_j, B_l conjuntos medibles que verifican $0 < |A_j|, |B_l| < \infty$, para α, β funciones holomorfas, definimos

$$f_\zeta = \sum_{1 \leq j \leq k} a_j^{\alpha(\zeta)} \chi_{A_j}, \quad g_\zeta = \sum_{1 \leq l \leq m} b_l^{\beta(\zeta)} \chi_{B_l},$$

entonces

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} (Af_\zeta)(x)\, g_\zeta(x)\, dx \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq l \leq m}} a_j^{\alpha(\zeta)} b_l^{\beta(\zeta)} \int_{\mathbb{R}^n} \left(A\chi_{A_j}\right)(x)\, \chi_{B_l}(x)\, dx \end{aligned}$$

es también holomorfa. Sean las funciones $\alpha(\zeta) = (1 - \zeta) p/p_0 + \zeta p/p_1$ y $\beta(\zeta) = (1 - \zeta) q'/q_0' + \zeta q'/q_1'$, tenemos que F es entera y vale

$$\begin{aligned} |F(\zeta)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} (Af_\zeta)(x)\, g_\zeta(x)\, dx \right| \\ &\leq \|Af_\zeta\|_{L^{q_j}} \|g_\zeta\|_{L^{q_j'}} \leq \|A\|_j \|f_\zeta\|_{L^{p_j}} \|g_\zeta\|_{L^{q_j'}} \end{aligned}$$

Siendo $\left|a_j^{\alpha(j+i\gamma)}\right| = a_j^{p/p_j}$, se verifica $\|f_{j+i\gamma}\|_{L^{p_j}}^{p_j} = \sum_{1\leq j\leq k} a_j^p |A_j| = \|f\|_{L^p}^p$ y de la misma forma $\|g_{j+i\gamma}\|_{L^{q'_j}}^{q'_j} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'}$. Por el lema 1.6, tenemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} (Af)(x)\, g(x)\, dx\right| = |F(\theta)| \leq \|A\|_0^{1-\theta} \|A\|_1^{\theta} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}},$$

Por el lema 1.1, obtenemos la demostración del teorema. □

1.3. Espacios L^p vectoriales

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ medible y X un espacio de Banach, consideramos el espacio $S(\Omega, X)$ de las funciones simples: $f : \Omega \to X$

$$f(x) = \sum_{1\leq j\leq k} \chi_{A_j}(x)\, f_j,$$

donde $\{A_j\}_{1\leq j\leq k}$ son conjuntos medibles con $0 < |A_j| < \infty$, disjuntos dos a dos y $f_j \in X$. Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega,X)} = \left(\sum_{1\leq j\leq k} |A_j|\, \|f_j\|_X^p\right)^{1/p}.$$

Se define $L^p(\Omega, X)$ como la completación de $S(\Omega, X)$ con esta norma. Para $g \in S(\Omega, X^*)$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle f(x), g(x)\rangle dx &= \sum_{\substack{1\leq j\leq k\\ 1\leq l\leq m}} |A_j \cap B_l|\, \langle f_j, g_l\rangle \\ &\leq \sum_{\substack{1\leq j\leq k\\ 1\leq l\leq m}} |A_j \cap B_l|\, \|f_j\|_X \|g_l\|_{X^*},\end{aligned}$$

usando que $|A_j \cap B_l| = |A_j \cap B_l|^{1/p} |A_j \cap B_l|^{1/p'}$ y la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\int_\Omega \langle f(x), g(x)\rangle dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega,X)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega,X^*)} \tag{1.4}$$

Por densidad podemos extender la integral a $f \in L^p(\Omega, X)$, $g \in L^{p'}(\Omega, X^*)$. En particular, $L^{p'}(\Omega, X^*) \hookrightarrow L^p(\Omega, X)^*$ y es posible ver que

Proposición 1.3. *Para $f \in L^p(\Omega, X)$ se verifica*

$$\|f\|_{L^p(\Omega,X)} = \sup_{\substack{g \in L^{p'}(\Omega,X^*) \\ \|g\|=1}} \int_\Omega \langle f(x), g(x) \rangle dx,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demostración. Por (1.4), basta mostrar la desigualdad contraria. Dada la función simple $f = \sum_{1 \le j \le k} \chi_{A_j} f_j$, para culaquier $\varepsilon > 0$, existen $g_j \in X^*$ con $\|g_j\|_{X^*} = 1$ tales que $\langle f_j, g_j \rangle \ge (1-\varepsilon)\|f_j\|_X$. Sea $g = \sum_{1 \le j \le k} \chi_{A_j} c_j g_j$, donde $c_j = \|f_j\|_X^{p-1} / \|f\|_{L^p(\Omega,X)}^{p-1}$, entonces

$$\|g\|_{L^{p'}(\Omega,X^*)}^{p'} = \sum_{1 \le j \le k} |A_j| \, c_j^{p'} = \sum_{1 \le j \le k} |A_j| \, \|f_j\|_X^p / \|f\|_{L^p(\Omega,X)}^p = 1$$

y vale

$$\int_\Omega \langle f(x), g(x) \rangle dx \ge (1-\varepsilon) \sum_{1 \le j \le k} |A_j| \, c_j \|f_j\|_X = (1-\varepsilon)\|f\|_{L^p(\Omega,X)}$$

siendo $\varepsilon > 0$, se verifica la igualdad. Por densidad de las funciones simples, se prueba el resultado para $f \in L^p(\Omega, X)$. □

1.4. Núcleo de Schrödinger

Queremos hallar la transformada de Fourier inversa de $S(\xi) = e^{i\frac{1}{2}|\xi|^2}$, como $S(\xi) = \prod_{1 \le j \le n} e^{i\frac{1}{2}\xi_j^2}$, tenemos $\check{S}(x) = \prod_{1 \le j \le n} \check{S}_j(x_j)$

$$\begin{aligned} \check{S}_j(x_j) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{1}{2}\left(\xi_j^2 + 2\xi_j x_j\right)} d\xi_j \\ &= e^{-i\frac{1}{2}x_j^2} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{1}{2}(\xi_j + x_j)^2} d\xi_j = e^{-i\frac{1}{2}x_j^2} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{1}{2}\xi_j^2} d\xi_j \end{aligned}$$

Lema 1.7. *Para $\alpha > 1$ se verifica*

$$\int_0^\infty e^{i\xi^\alpha} d\xi = e^{i\frac{\pi}{2\alpha}} \Gamma(1 + 1/\alpha).$$

Demostración. Dados $0 < r_1 < r_2$ consideramos los caminos $C_j(t) = r_j e^{it/\alpha}$ con $0 \leq t \leq \pi/2$ y $L(t) = e^{i\frac{\pi}{2\alpha}} t$ para $r_1 \leq t \leq r_2$, vale

$$\int_{r_1}^{r_2} e^{i\xi^\alpha} d\xi = \int_{C_1} e^{iz^\alpha} dz - \int_{C_2} e^{iz^\alpha} dz + \int_L e^{iz^\alpha} dz.$$

Para $j = 1, 2$, usando que $\frac{2}{\pi} t \leq \sin t$ para $0 \leq t \leq \pi/2$, obtenemos

$$\left| \int_{C_j} e^{iz^\alpha} dz \right| = \frac{r_j}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_j^\alpha \sin t} dt \leq \frac{r_j}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} r_j^\alpha t} dt = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{1 - e^{-r_j^\alpha}}{r_j^{\alpha-1}},$$

entonces vale $\displaystyle\int_{C_j} e^{iz^\alpha} dz \to 0$ si $r_j \to 0$ ó ∞. Por otro lado, usando el cambio de variable $t = s^{1/\alpha}$

$$\lim_{\substack{r_1 \to 0 \\ r_2 \to \infty}} \int_L e^{iz^\alpha} dz = \lim_{\substack{r_1 \to 0 \\ r_2 \to \infty}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2\alpha}}}{\alpha} \int_{r_1^{1/\alpha}}^{r_2^{1/\alpha}} e^{-s} s^{\frac{1}{\alpha}-1} ds = \frac{e^{i\frac{\pi}{2\alpha}} \Gamma(1/\alpha)}{\alpha},$$

Usando que $z\Gamma(z) = \Gamma(1+z)$ obtenemos el resulado. $\square$

Proposición 1.4. *Si* $S_t(\xi) = e^{it|\xi|^2}$, *entonces para* $t \neq 0$

$$\check{S}_t(x) = \left(2^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn(t)}}\right)^n |t|^{-n/2} e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}$$

Demostración. Consideremos $S_t(\xi) = S\left((2t)^{1/2}\xi\right)$ con $S(\xi) = e^{i\frac{1}{2}|\xi|^2}$ para $t > 0$, por lo tanto $\check{S}_t(x) = (2t)^{-n/2} \check{S}\left(x/\sqrt{2t}\right)$. Como $S(\xi) = \prod_{1 \leq j \leq n} e^{i\frac{1}{2}\xi_j^2}$, tenemos $\check{S}(x) = \prod_{1 \leq j \leq n} \check{S}_j(x_j)$, calculamos entonces

$$\begin{aligned}\check{S}_j(x_j) =& (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{1}{2}\left(\xi_j^2 + 2\xi_j x_j\right)} d\xi_j \\ =& e^{-i\frac{1}{2}x_j^2} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{1}{2}(\xi_j + x_j)^2} d\xi_j = e^{-i\frac{1}{2}x_j^2} (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{1}{2}\xi_j^2} d\xi_j.\end{aligned}$$

Por el lema anterior

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{1}{2}\xi^2} d\xi = 2\sqrt{2} \int_0^\infty e^{i\xi^2} d\xi = (2\pi)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}},$$

por lo tanto $\check{S}(x) = e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{-i\frac{1}{2}|x|^2}$, de donde se obtiene el resultado para $t > 0$. Usando que $\check{S}_t(x) = \overline{\check{S}_{-t}(-x)}$, probamos el caso $t < 0$. $\square$

Proposición 1.5. *Sea* $1 \leq p \leq 2$*, si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *se verifica*

$$\left\| \check{S}_t * f \right\|_{L^{p'}} \leq C_p \, |t|^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \, \|f\|_{L^p}$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demostración. Siendo $|S_t(\xi)| = 1$, tenemos $\left\| \check{S}_t * f \right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Si $p = 1$, tenemos

$$\left\| \check{S}_t * f \right\|_{L^\infty} \leq \left\| \check{S}_t \right\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} = C_n \, |t|^{-n/2} \, \|f\|_{L^1} \, .$$

El resultado es consecuencia del teorema de Riesz-Ahorin. □

Capítulo 2

Teoría Espectral

2.1. Operadores Cerrados

Definición 2.1. Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador lineal definido en un subespacio $D \subset \mathrm{H}$, decimos que A es cerrado sii para toda sucesión x_n tal que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$, se verifica que $x \in D$ y $Ax = y$.

Proposición 2.1. *Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador lineal definido en un subespacio $D \subset \mathrm{H}$, son equivalentes*

(1) *A es cerrado.*

(2) *$G_A = \{(x, Ax) : x \in D\}$ es un conjunto cerrado de $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$.*

(3) *D con el producto $(x, y)_A = (x, y)_{\mathrm{H}} + (Ax, Ay)_{\mathrm{H}}$ es un espacio de Hilbert.*

Observación 2.1. El operador A es acotado de $(D, (.,.)_A)$ en $(\mathrm{H}, (.,.)_{\mathrm{H}})$.

Proposición 2.2. *Sea $A : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ un operador lineal, A es cerrado si y sólo si A es acotado.*

Demostración. Supongamos que A es cerrado, entonces el operador inclusión $\iota : (\mathrm{H}, (.,.)_A) \to (\mathrm{H}, (.,.)_{\mathrm{H}})$ definido por $\iota x = x$ verifica $\mathrm{Ran}(\iota) = \mathrm{H}$, $\mathrm{Ker}(\iota) = 0$ y $\|\iota x\|_{\mathrm{H}} \leq \|x\|_A$. Entonces, por el teorema del gráfico cerrado, existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|^2 + \|Ax\|^2 \leq C \|x\|^2 ,$$

y por lo tanto $A \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$. La afirmación recíproca es inmediata. $\square$

Observación 2.2. Un subespacio cerrado $M \subset \mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$ es el gráfico de un operador cerrado si y sólo si $M \bigcap \{0\} \oplus \mathrm{H} = \{(0,0)\}$.

Definición 2.2. Sean $A_k : D_k \to \mathrm{H}$ con $k = 1, 2$ operadores lineales, decimos que $A_1 \subset A_2$ sii $D_1 \subset D_2$ y se verifica $A_1 x = A_2 x$ para todo $x \in D_1$.

Proposición 2.3. *Sean $A_k : D_k \to \mathrm{H}$ con $k = 1, 2$ operadores lineales, son equivalentes*

(1) $A_1 \subset A_2$.

(2) $G_{A_1} \subset G_{A_2}$.

Definición 2.3. Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador lineal definido en un subespacio $D \subset \mathrm{H}$, decimos que A es clausurable sii $\overline{G_A}$ es el gráfico de un operador cerrado. El operador $\overline{A}$ asociado a $\overline{G_A}$ es la clausura de A.

Definición 2.4. Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador lineal definido en un subespacio denso $D \subset \mathrm{H}$, definimos el conjunto D^* como todos los $x \in \mathrm{H}$ tales que la aplicación lineal $f_x : D \to \mathbb{C}$ dada por $f_x(y) = (x, Ay)$ se extiende a una funcional lineal continua. Para $x \in D^*$, $A^* x$ verifica $(A^* x, y) = (x, Ay)$.

Proposición 2.4. *Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador lineal definido en un subespacio denso $D \subset \mathrm{H}$, A^* es un operador lineal cerrado.*

Demostración. Sean $x_n \in D^*$ que verifican $x_n \to x$ y $A^* x_n \to z$, como $(x_n, Ay) = (A^* x_n, y)$ tenemos que $(x, Ay) = (z, y)$ para todo $y \in D$. Por lo tanto $x \in D^*$ y vale $Ax = z$. □

Proposición 2.5. *Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador lineal definido en un subespacio denso $D \subset \mathrm{H}$, se verifica* $\mathrm{Ran}(A)^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^*)$.

Demostración. Sea $x \in \mathrm{H}$, para $y \in D$ se verifica $(x, Ay) = 0$ si y sólo si $(A^* x, y) = 0$, lo que prueba el resultado. □

Proposición 2.6. *Si $V : \mathrm{H} \oplus \mathrm{H} \to \mathrm{H} \oplus \mathrm{H}$ el operador unitario definido por $V(x, y) = (-y, x)$, entonces $G_{A^*} = V(G_A)^{\perp}$.*

Proposición 2.7. *Sean $A_k : D_k \to \mathrm{H}$ con $k = 1, 2$ operadores lineales densamente definidos, si $A_1 \subset A_2$ entonces $A_2^* \subset A_1^*$.*

Demostración. Como $G_{A_1} \subset G_{A_2}$, tenemos que $V(G_{A_2})^{\perp} \subset V(G_{A_1})^{\perp}$ y por lo tanto $A_2^* \subset A_1^*$. □

Definición 2.5. Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador lineal definido en un subespacio $D \subset \mathrm{H}$, decimos que A es inversible sii existe $R \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ con $\mathrm{Ran}(R) = D$ tal que

(1) $ARx = x$ para todo $x \in \mathrm{H}$,

(2) $RAx = x$ para todo $x \in D$.

Observación 2.3. Como el operador inverso de un operador es acotado por definición, necesariamente A es cerrado.

Definición 2.6. Definimos el conjunto resolvente $\rho(A)$ como el conjunto de valores $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $A - \lambda I$ es inversible y denominamos operador resolvente a su inverso, $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$. Llamaremos espectro de A al conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$.

Lema 2.1. *Si $A : D \to \mathrm{H}$ es un operador cerrado y $\lambda, \mu \in \rho(A)$, entonces*

$$R_A(\mu) - R_A(\lambda) = -(\mu - \lambda) R_A(\mu) R_A(\lambda).$$

En particular $R_A(\mu) R_A(\lambda) = R_A(\lambda) R_A(\mu)$.

Demostración. Si $x \in \mathrm{H}$, vale que $y = R_A(\lambda) x \in D$, entonces

$$(A - \lambda I) y = (A - \mu I)(I - (\mu - \lambda) R_A(\mu)) y,$$

por lo tanto $R_A(\mu)(A - \lambda I) y = (I - (\mu - \lambda) R_A(\mu)) y$. Obtenemos

$$R_A(\mu) x = R_A(\lambda) x - (\mu - \lambda) R_A(\mu) R_A(\lambda) x$$

lo que implica el resultado. □

Proposición 2.8. *Sea A un operador cerrado, el conjunto resolvente $\rho(A)$ es abierto.*

Demostración. Si $\lambda_0 \in \rho(A)$, escribimos

$$A - \lambda I = (A - \lambda_0 I)(I - (\lambda_0 - \lambda) R_A(\lambda_0)),$$

si $|\lambda_0 - \lambda| \, \|R_A(\lambda_0)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{H})} < 1$, entonces $A - \lambda I$ es inversible y su inversa es $R_A(\lambda) = (I - (\lambda_0 - \lambda) R_A(\lambda_0))^{-1} R_A(\lambda_0)$. □

La siguiente proposición nos da una forma de construir ejemplos de operadores cerrados. Además los operadores diferenciales con coeficientes constantes se diagonalizan mediante la transformada de Fourier, en operadores de multiplicación.

Proposición 2.9. *Dado $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ–finito, consideramos el espacio de Hilbert $\mathrm{H} = L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$. Si $m : X \to \mathbb{C}$ función medible, finita en casi todo punto, entonces el subespacio $D_m = \{f \in \mathrm{H} : mf \in \mathrm{H}\}$ es denso y el operador $A_m : D_m \to \mathrm{H}$ definido como $A_m f = mf$ es cerrado.*

Demostración. Sea $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$, $X_n \subset X_{n+1}$ medibles y $\mu(X_n) < \infty$, si definimos $f_n = f\,\chi_n$, donde χ_n es la característica de X_n, se verifica $|f_n| \leq |f|$ y $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in X$. Por el teorema de convergencia mayorada $f_n \to f$ en H. Para probar que D_m es denso, basta considerar $\mu(X) < \infty$. Sea $E_\infty = \bigcap_{k\geq 1} E_k$, con $E_k = \{x \in X : |m(x)| > k\}$, como $|E_\infty| = 0$, tenemos $\lim\limits_{k\to\infty} |E_k| = 0$. Por lo tanto, dado $f \in \mathrm{H}$, para $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{E_k} |f(x)|^2\, dx < \varepsilon^2.$$

Si definimos $g = f - f\,\chi_{E_k}$, tenemos que $g = 0$ en E_k y $\|f - g\| < \varepsilon$. Siendo que $|m(x)| \leq k$ si $x \in X - E_k$, vale que $m.g \in \mathrm{H}$.

Si $f_n \in D_m$ verifican $f_n \overset{\mathrm{H}}{\to} f$ y $m.f_n \overset{\mathrm{H}}{\to} g$, podemos hallar una subsucesión tal que $f_{n_j}(x) \to f(x)$ y $m(x)\, f_{n_j}(x) \to g(x)$ para casi todo $x \in X$. Esto implica $m.f = g$, por lo tanto $f \in D_m$ y $A_m f = g$. □

Ejercicios

2.1. Probar la observación 2.3.

2.2. Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador cerrado y $\lambda \in \rho(A)$, probar que $\mu \in \rho(A)$ si y sólo si $I - (\mu - \lambda) R_A(\lambda)$ es inversible.

2.3. Sea $D_k(\lambda) = \mathrm{Ran}\left(R_A(\lambda)^k\right)$, probar que

(a) $D_k(\lambda)$ es un subespacio denso de H.

(b) $D_k(\lambda) = D_k(\mu)$ para $\mu \in \rho(A)$.

(c) $D_1 = D$ y $D_k = \{x \in D_{k-1} : Ax \in D_{k-1}\}$ para $k \geq 2$.

(d) $(A - \lambda I)^k : D_k \to \mathrm{H}$, definido como $(A - \lambda I)^k x = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^{k-1} x$, es un operador cerrado.

2.4. Probar que en la proposición 2.9, A_m es acotado si y sólo si m lo es. Mostrar que $\sigma(A_m) = \overline{\{m(x) : x \in X\}}$

2.2. Operadores Autoadjuntos

Definición 2.7. Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador lineal definido en un subespacio denso $D \subset \mathrm{H}$, A es simétrico sii $(x, Ay) = (Ax, y)$ para $x, y \in D$.

Observación 2.4. Si A es simétrico, entonces $A \subset A^*$ y $A \subset \overline{A} = A^{**} \subset A^*$. Además para todo $x \in D$ y $\lambda = \theta + i\gamma$,

$$\|(A - \lambda I)\, x\|^2 = \|(A - \theta I)\, x\|^2 + \gamma^2 \|x\|^2 \geq \gamma^2 \|x\|^2 .$$

En particular $\|Ax\|^2 \leq \|(A - i\gamma I)\, x\|^2$, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.10. *Si A es simétrico y cerrado, entonces* $\mathrm{Ran}\,(A - \lambda I)$ *es cerrado para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con* $\mathrm{Im}\,(\lambda) \neq 0$.

Demostración. Sea x_n una sucesión de D tal que $(A - \lambda I)\, x_n$ converge a y, usando la desigualdad anterior, tenemos que x_n y $Ax_n = (A - \lambda I)\, x_n + \lambda x_n$ son sucesiones de Cauchy y por lo tanto convergentes. Como A es cerrado, $y = (A - \lambda I)\, x$, donde $x = \lim_n x_n \in D$. □

Definición 2.8. Un operador simétrico es autoadjunto sii $A = A^*$.

Lema 2.2. *Si A es simétrico, entonces* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \rho\,(A)\,, \mathrm{Im}\,(\lambda) > 0\}$ *es un subconjunto abierto y cerrado del semiplano superior.*

Demostración. Claramente es abierto, para ver que también es cerrado consideramos $\Lambda^n \in \rho\,(A)$ con $\mathrm{Im}\,(\Lambda^n) > 0$ tal que $\Lambda^n \to \lambda$ con $\mathrm{Im}\,(\lambda) > 0$. Siendo A simétrico, por la observacion 2.4 vale $\|R_A\,(\Lambda^n)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{H})} \leq \mathrm{Im}\,(\Lambda^n)^{-1}$, y por lo tanto $\|R_A\,(\Lambda^n)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{H})} \leq 2\mathrm{Im}\,(\lambda)^{-1}$ si n es suficientemente grande. Un argumento similar al usado en la demostración de la proposición 2.8, prueba que $\lambda \in \rho\,(A)$. □

Corolario 2.1. *Si A es simétrico y $\lambda_0 \in \sigma\,(A)$ con $\mathrm{Im}\,(\lambda_0) \gtreqless 0$, entonces $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(\lambda) \gtreqless 0\} \subset \sigma\,(A)$.*

Demostración. Por el lema anterior, el conjunto $\{\lambda \in \sigma\,(A) : \mathrm{Im}\,(\lambda) > 0\}$ es cerrado, abierto y no vacío, por la conexión del semiplano, obtenemos el resultado. □

Corolario 2.2. *Si A es simétrico, vale alguna de las siguientes afirmaciones*

(a) $\sigma\,(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(\lambda) > 0\}$.

(b) $\sigma\,(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(\lambda) < 0\}$.

(c) $\sigma\,(A) = \mathbb{C}$.

(d) $\sigma\,(A) \subset \mathbb{R}$.

Teorema 2.1. *Sea A un operador cerrado simétrico definido en $D \subset \mathrm{H}$ subespacio denso, entonces son equivalentes*

(1) *A es autoadjunto.*

(2) $\operatorname{Ran}(A \pm iI) = \mathrm{H}$.

(3) $\operatorname{Ker}(A^* \pm iI) = \{0\}$.

(4) *$A \pm iI$ son isomorfismo de D en* H.

(5) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Por las proposiciones 2.10 y 2.5, tenemos la equivalencia entre (2) y (3) y del teorema del gráfico cerrado y la observación 2.1, vemos que (2) vale si y sólo si se verifica (4). El corolario 2.1 implica la equivalencia entre las afirmaciones (4) y (5). Si se verifica (1), entonces por la observación 2.4, $\operatorname{Ker}(A^* \pm iI) = \operatorname{Ker}(A \pm iI) = \{0\}$ y por lo tanto vale (3). Supongamos que valen las afirmaciones (2)–(5). Como A es simétrico y cerrado, D es un subespacio cerrado de D^* (con el producto $(.,.)_{A^*}$), para ver que A es autoadjunto, basta probar que D es denso. Sea $y \in D^*$ tal que $(x,y)_{A^*} = 0$ para $x \in D$, entonces

$$0 = (A^*x, A^*y) + (x,y) = (Ax, A^*y) + (x,y) = ((A - iI)\,x, (A^* - iI)\,y)\,.$$

Por lo tanto $(A^* - iI)\,y \in \operatorname{Ran}(A - iI)^{\perp} = \{0\}$, pero

$$\operatorname{Ker}(A^* - iI) = \operatorname{Ran}(A + iI)^{\perp} = \{0\}\,,$$

vale entonces $y = 0$ y por lo tanto vale (1). □

Corolario 2.3. *Sea A un operador cerrado simétrico definido en $D \subset \mathrm{H}$ subespacio denso, A es autoadjunto si y sólo si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.1. Sea $\mathrm{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, $D = \{f \in H^1(\mathbb{R}_+) : f(0) = 0\}$ y A el operador lineal definido por $Af = -if'$, integrando por partes podemos ver que A es simétrico:

$$\begin{aligned}(Af, g) &= \int_0^{+\infty} \overline{-if'(t)}\,g(t)\,dt \\ &= i\overline{f(t)}\,g(t)\Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} i\overline{f(t)}\,g'(t)\,dt = (f, Ag)\end{aligned}$$

Si $(A - iI)\,f = g$, f verifica la ecuación diferencial $f' + f = ig$ con condición inicial $f(0) = 0$, por lo tanto

$$f(t) = i\int_0^t e^{-(t-s)}g(s)\,ds = (K * \tilde{g})(t)$$

con $K(t) = \chi_+(t)\, e^{-t}$, $\tilde{g} = g\chi_+$, donde χ_+ es la función característica del intervalo $[0, +\infty)$. Siendo $K \in L^1(\mathbb{R})$ y $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$, vale que $f \in \mathrm{H}$ y por lo tanto $f' = ig - f \in \mathrm{H}$. Además $f(0) = 0$, lo que implica $f \in D$. Por otro lado, si tomamos $g = -i\chi_{[0,1]} \in \mathrm{H}$, la ecuación diferencial $f' - f = ig$ con condición inicial $f(0) = 0$ tiene (única) solución

$$f(t) = \begin{cases} e^t - 1 & \text{, si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^t - e^{t-1} & \text{, si } t > 1 \end{cases},$$

por lo tanto $(A + iI) f = g$ no tiene solución con $f \in D$. Aenemos entonces $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\lambda) < 0\}$.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathrm{H} = L^2(0,1)$, consideramos el operador $A_0 : D_0 \to \mathrm{H}$ definido por $A_0 f = -if'$ en $D_0 = \{f \in H^1(0,1) : f(0) = 0, f(1) = 0\}$. Cálculos similares a los del ejemplo anterior muestran que A_0 es simétrico. Si planteamos la ecuación $f' \pm f = ig$ con $f(0) = 0$, obtenemos

$$f(t) = i \int_0^t e^{\mp(t-s)} g(s)\, ds,$$

que implica $f(1) = 0$ si y sólo si $\displaystyle\int_0^1 e^{\pm s} g(s)\, ds = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Ran}(A \pm iI)$ es un subespacio cerrado de codimensión 1, vale entonces $\sigma(A_0) = \mathbb{C}$. Se puede ver que $A_0^* f = -if'$ con dominio $D_0^* = H^1(0,1)$.

Dado $\omega \in \mathbb{C}$ con $|\omega| = 1$, consideramos $A_\omega : D_\omega \to \mathrm{H}$ donde $A_\omega f = -if'$ y $D_\omega = \{f \in H^1(0,1) : f(1) = \omega f(0)\}$. Si resolvemos $f' + f = ig$, obtenemos

$$f(t) = f(0)\, e^{-t} + i \int_0^t e^{-(t-s)} g(s)\, ds,$$

de la condición de contorno se obtiene $(\omega e - 1) f(0) = i \displaystyle\int_0^1 e^s g(s)\, ds$. Por lo tanto $f(t) = i(\omega e - 1)^{-1} \displaystyle\int_0^1 K(t,s)\, e^{-(t-s)} g(s)\, ds$, donde

$$K(t,s) = \begin{cases} \omega e, & \text{si } 0 \leq s < t \leq 1 \\ 1, & \text{si } 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases},$$

por lo tanto $i \in \rho(A)$. De manera similar podemos probar que $-i \in \rho(A)$, lo que implica A_ω autoadjunto.

Ejemplo 2.3. Consideremos H, D_m y A_m como en la proposición 2.9. Si m toma valores reales, entonces A_m es autoadjunto, con $R_A(\pm i) f = (m \mp i)^{-1} f$ y $\sigma(A) = \overline{\{m(x) : x \in X\}}$. Esto nos permite construir ejemplos de operadores autoadjuntos cuyo espectro sea cualquier subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

Lema 2.3. *Si $A : D \to \mathrm{H}$ un operador autoadjunto y $\lambda > 0$, entonces se verifica $\|\mp i\lambda R_A(\pm i\lambda)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{H})} \leq 1$. Además, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mp i\lambda R_A(\pm i\lambda) x = x$, para todo $x \in \mathrm{H}$.*

Demostración. De la observación 2.4, obtenemos $\lambda \|x\| \leq \|(A \mp i\lambda) x\|$ para todo $x \in D$, lo que implica $\|R_A(\pm i\lambda)\|_{\mathcal{B}(\mathrm{H})} \leq \lambda^{-1}$. Si $x \in D$, entonces

$$\|AR_A(\pm i\lambda) x\| = \|R_A(\pm i\lambda) Ax\| \leq \lambda^{-1} \|Ax\|,$$

lo que prueba $AR_A(\pm i\lambda) x \to 0$. Usando que $I = AR_A(\pm i\lambda) \mp i\lambda R_A(\pm i\lambda)$, se obtiene $\mp i\lambda R_A(\pm i\lambda) x \to x$. Si $x \in \mathrm{H}$, consideramos $x_n \in D$ tales que $x_n \to x$, entonces

$$\begin{aligned}\|\mp i\lambda R_A(\pm i\lambda) x - x\| &\leq \|\mp i\lambda R_A(\pm i\lambda)(x - x_n)\| \\ &\quad + \|\mp i\lambda R_A(\pm i\lambda) x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \|\mp i\lambda R_A(\pm i\lambda) x_n - x_n\| + 2\|x_n - x\|,\end{aligned}$$

tomando n y λ suficientemente grandes, obtenemos el resultado □

Proposición 2.11. *Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador autoadjunto, entonces para $\lambda > 0$, el operador $A_\lambda = \lambda^2 R_A(-i\lambda) AR_A(i\lambda)$ es simétrico, acotado y para $x \in D$ vale*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax.$$

Además, si $\lambda, \mu > 0$, entonces $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$.

Demostración. De $AR_A(i\lambda) = I + i\lambda R_A(i\lambda)$ y $R_A(-i\lambda) A = I - i\lambda R_A(-i\lambda)$, obtenemos que A_λ es acotado y las igualdades

$$\begin{aligned}A_\lambda &= \lambda^2 R_A(-i\lambda) + i\lambda^3 R_A(-i\lambda) R_A(i\lambda) \\ &= \lambda^2 R_A(i\lambda) - i\lambda^3 R_A(-i\lambda) R_A(i\lambda).\end{aligned}$$

Del lema 2.1, obtenemos que A_λ y A_μ conmutan. Como $R_A(\pm i\lambda)^* = R_A(\mp i\lambda)$, podemos ver que A_λ es simétrico. Para $x \in D$, se verifica

$$\begin{aligned}\|A_\lambda x - Ax\| \leq &\|i\lambda R_A(-i\lambda)(-i\lambda R_A(i\lambda) Ax - Ax)\| \\ &+ \|i\lambda R_A(-i\lambda) Ax - Ax\|.\end{aligned}$$

Usando el lema anterior vemos que

$$\|A_\lambda x - Ax\| \leq \|-i\lambda R_A(i\lambda) Ax - Ax\| + \|i\lambda R_A(-i\lambda) Ax - Ax\|,$$

lo que prueba $A_\lambda x \to Ax$. □

Ejercicios

2.5. Probar la afirmación 2.4.

2.6. Probar el corolario 2.2.

2.7. Hallar el espectro del operador A_ω del ejemplo 2.2.

2.8. Probar que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A_m del ejemplo 2.3 si y sólo si la imagen inversa de λ por el multiplicador m tiene medida positiva.

2.9 (*). Transformada de Cayley: Dado un operador $A : D \to \mathrm{H}$ autoadjunto, se define el operador

$$U = (A + iI)\, R_A(i),$$

conocido como transformada de Cayley de A.

(a) Probar que U es unitario con $\operatorname{Ker}(U - I) = \{0\}$.

(b) Probar que si U es unitario y 1 no es autovalor, entonces existe un operador A autoadjunto definido en el subespacio $D = \operatorname{Ran}(U^* - I)$ verificando la relación anterior.

(c) Dar una expresión de la transformada inversa de Cayley.

(d) Dar una condición sobre U que sea equivalente a $A \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$.

2.10. Sea $A : D \to \mathrm{H}$ un operador autoadjunto tal que $(Ax, x) \geq 0$ para todo $x \in D$, probar que $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$.

2.3. Grupos Unitarios

Definición 2.9. Una aplicación $W : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathrm{H})$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios sii

(a) $W(t_1 + t_2) = W(t_1)\, W(t_2)$.

(b) $W(t)$ es un operador unitario.

(c) $W(t)\, x$ es continua en t para cada $x \in \mathrm{H}$.

Vemos que $W(0) = I$ y $W(-t) = W^*(t)$, además (c) es equivalente a las siguientes condiciones:

Proposición 2.12. *Si* $W : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathrm{H})$ *verifica (a) y (b), entonces para* $x \in \mathrm{H}$*, son equivalentes*

(1) $W(t)x$ *es continua en* $t = 0$.

(2) $W(t)x$ *es débilmente continua en* $t = 0$.

(3) $W(t)x$ *es continua para* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si $W(t)x \rightharpoonup x$ si $t \to 0$, como $W(t)$ es unitario tenemos $\|W(t)x\| = \|x\|$ y por lo tanto $W(t)x \to x$. Como $W(t+\tau) = W(t)W(\tau)$ es inmediato ver que la continuidad en $t = 0$ es equivalente a la continuidad en $t \in \mathbb{R}$. □

Observación 2.5. En $\mathrm{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ consideramos $W(t)f = e^{-itm}f$ donde m es una función medible real. Es fácil ver que W es un grupo de operadores unitarios, la continuidad fuerte es consecuencia de la convergencia puntual $\lim\limits_{t\to 0} e^{-itm(x)} = 1$. La convergencia uniforme sólo se obtiene si m es acotada.

Lema 2.4. *Dado* $x \in \mathrm{H}$*, se verifica* $\lim\limits_{\tau\to 0^+} x_\tau = x$*, donde* $x_\tau = \tau^{-1}\int_0^\tau W(t)\,xdt$

Definición 2.10. Definimos el subespacio

$$D = \{x \in \mathrm{H} : W(t)\,x \text{ es derivable en } 0\}$$

y el operador $A : D \to \mathrm{H}$ dado por $Ax = iW'(0)\,x$

Proposición 2.13. *Si* $x \in D$ *y* $t \in \mathbb{R}$*, entonces* $W(t)x \in D$ *y se verifica*

$$iW'(t)\,x = W(t)\,Ax = AW(t)\,x$$

Proposición 2.14. *El subespacio* D *es denso en* H*,* A *es autoadjunto y para* $\lambda > 0$ *se verifica*

$$R_A(\pm i\lambda)\,x = \mp i\int_0^\infty e^{-\lambda t}W(\pm t)\,xdt.$$

Demostración. Para $x \in \mathrm{H}$, $\tau > 0$ consideramos

$$x_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau W(t)\,xdt, \tag{2.1}$$

por el lema 2.4, $\{x_\tau : x \in \mathrm{H}, \tau > 0\}$ es denso en H y se verifica

$$\frac{W(h)\,x_\tau - x_\tau}{h} = \frac{1}{\tau}(W(\tau) - I)\,\frac{1}{h}\int_0^h W(t)\,xdt,$$

por lo tanto $x_\tau \in D$ y $Ax_\tau = i\tau^{-1}(W(\tau) - I)x$. Sea $x_n \in D$ tal que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$, usando que

$$i\frac{W(t)x_n - x_n}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t W(s)Ax_n ds,$$

tomando límite en n tenemos que

$$i\frac{W(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t W(s)yds,$$

por lo tanto $x \in D$ y $Ax = y$, lo que muestra que A es cerrado. Dado $x \in H$ vale

$$\begin{aligned} W(\tau)R_A(i\lambda)x - R_A(i\lambda)x =& i\left(e^{\lambda\tau} - 1\right)\int_\tau^\infty e^{-\lambda t}W(t)xdt \\ &- i\int_0^\tau e^{-\lambda t}W(t)xdt. \end{aligned}$$

Dividiendo por τ y tomando límite $\tau \to 0$ tenemos que $R_A(i\lambda)x \in D$ y $(A - i\lambda I)R_A(i\lambda)x = x$. También vale para $x \in D$

$$R_A(i\lambda)Ax = i\int_0^\infty e^{-\lambda t}W(t)Axdt = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}(W(t)x)'dt$$

Integrando por partes tenemos $R_A(i\lambda)(A - i\lambda I)x = x$. De manera similar probamos que $R_A(-i\lambda)$ es el operador resolvente en $-i\lambda$ y por el teorema 2.1, obtenemos que A es autoadjunto. □

Definición 2.11. El operador A se denomina generador infinitesimal del grupo fuertemente continuo de operadores W.

Observación 2.6. Si $A \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ es simétrico, entonces

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-it)^k}{k!}A^k,$$

define un grupo fuertemente continuo de operadores con generador infinitesimal A. Más aún, W es uniformemente continuo.

Es fácil ver que si dos operadores acotados y simétricos conmutan, entonces los grupos de operadores unitarios asociados también conmutan.

Proposición 2.15. *Si W es un grupo uniformemente continuo de operadores, entonces el generador infinitesimal $A = iW'(0)$ es acotado.*

Demostración. Sea $I_\tau = \tau^{-1}\int_0^\tau W(t)\,dt$, tenemos que $\lim_{\tau\to 0} I_\tau = I$, por lo tanto I_τ es un isomorfismo de H si τ es suficientemente pequeño. Como $\operatorname{Ran}(I_\tau) \subset D$ tenemos $D = \mathrm{H}$. Entonces A es cerrado y está definido en H, de la proposición 2.2, obtenemos $A \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$. □

Teorema 2.2. *Sea A un operador autoadjunto, entonces existe W grupo fuertemente continuo de operadores tal que A es el generador infinitesimal.*

Demostración. Sean A_n operadores simétricos, acotados que conmutan tales que $A_n x \to Ax$ para $x \in D$ (ver proposición 2.11) y W_n es el grupo fuertemente continuo de operadores asociado a A_n, se verifica

$$\|W_n(t)\,x - W_m(t)\,x\| = \|W_m(-t)\,W_n(t)\,x - x\|\,.$$

Si $y \in D$, entonces

$$\begin{aligned}(W_m(-t)\,W_n(t)\,x - x, y) &= (W_n(t)\,x, W_m(t)\,y) - (x, y)\\ &= \int_0^t (iW_m(-s)\,W_n(s)\,(A_m - A_n)\,x, y)\,ds\end{aligned}$$

por lo tanto $|\,(W_m(-t)\,W_n(t)\,x - x, y)\,| \le |t|\,\|(A_m - A_n)\,x\|\,\|y\|$. Como D es denso, obtenemos

$$\|W_n(t)\,x - W_m(t)\,x\| \le |t|\,\|(A_m - A_n)\,x\|\,.$$

Por lo tanto existe $W(t)\,x = \lim_n W_n(t)\,x$. Usando nuevamente que D es denso y $\|W_n\|_{\mathcal{B}(\mathrm{H})} = 1$, extendemos W a H. Como $(W_n(t)\,x, W_n(t)\,y) = (x, y)$, tenemos que $W(t)$ es unitario y $W^*(t) = W(-t)$. Se verifica

$$\begin{aligned}(W(t_1 + t_2)\,x, y) &= \lim_n (W_n(t_1 + t_2)\,x, y)\\ &= \lim_n (W_n(t_2)\,x, W_n(-t_1)\,y) = (W(t_2)\,x, W(-t_1)\,y)\,,\end{aligned}$$

por lo tanto $W(t_1 + t_2) = W(t_1)\,W(t_2)$. Vamos a mostrar que $W(t)\,x$ es continuo en 0, supongamos que $x \in D$, tenemos

$$\|W(t)\,x - W_n(t)\,x\| \le |t|\,\|Ax - A_n x\|$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}\|W(t)\,x - x\| &\le \|W(t)\,x - W_n(t)\,x\| + \|W_n(t)\,x - x\|\\ &\le |t|\,\|Ax - A_n x\| + \|W_n(t)\,x - x\|\end{aligned}$$

tomando límite $t \to 0$, obtenemos la continuidad. Dado $x \in \mathrm{H}$, consideramos $x_k \in D$ tal que $\lim_k x_k = x$, entonces

$$\begin{aligned}\|W(t)x - x\| \leq& \|W(t)x - W(t)x_k\| + \|W(t)x_k - x_k\| + \|x_k - x\| \\ =& 2\|x_k - x\| + \|W(t)x_k - x_k\|\end{aligned}$$

tomando k suficientemente grande y t pequeño obtenemos el resultado. Vamos a ver que A es el generador infinitesimal de W, dado $x \in D$ tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{W(t)x - x}{t} + iAx\right\| =& \left\|\frac{W(t)x - W_n(t)x}{t}\right\| \\ &+ \left\|\frac{W_n(t)x - x}{t} + iA_nx\right\| + \|iAx - iA_nx\| \\ &\leq 2\|Ax - A_nx\| + \left\|\frac{W_n(t)x - x}{t} + iA_nx\right\|\end{aligned}$$

tomando n grande y t pequeño, obtenemos $W'(0)x = -iAx$. □

Ejercicios:

2.11. Sea W es un grupo fuertemente continuo de operadores, para $x \in \mathrm{H}$ y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, se considera

$$x_\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)W(t)xdt.$$

Probar que $x_\varphi \in D_\infty = \bigcap_{k \geq 1} D_k$, con D_k como en el ejercicio 2.3.

2.12. Sea W como en el ejercicio 2.11, probar que $W|_D : D \to D$ define un grupo fuertemente continuo de operadores en $(D, (.,.)_A)$, donde A es el generador infinitesimal de W.

2.13. Probar:

(a) $Wf \in C(\mathbb{R}, \mathrm{H})$, si $f \in C(\mathbb{R}, \mathrm{H})$.

(b) $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathrm{H})$, si $f \in C(\mathbb{R}, \mathrm{H})$, donde $g(t) = \displaystyle\int_0^t W(-s)f(s)ds$.

(c) $g \in C^1(\mathbb{R}, D)$, si $f \in C(\mathbb{R}, D)$.

(d) $Wg \in C(\mathbb{R}, D) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathrm{H})$, si $g \in C^1(\mathbb{R}, D)$ y vale

$$(Wg)' = -iAWg + g'.$$

2.14. Probar que W es único en el teorema 2.2.

2.15. Hallar el grupo fuertemente continuo de operadores W_ω asociado al operador autoadjunto A_ω del ejemplo 2.2.

2.4. Problemas Semilineales

2.4.1. Generalidades

Consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t = Au + B(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $A : D \to \mathrm{H}$ es un operador autoadjunto y $B : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ es una aplicación continua. Si $u \in C(\mathbb{R}, D) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathrm{H})$ es una solución de (2.2), entonces verifica

$$u(t) = W(t)\, u_0 - i \int_0^t W(t-s)\, B(u(s))\, ds. \tag{2.3}$$

Observemos que la ecuación integral (2.3) tiene sentido para $u \in C(\mathbb{R}, H)$. Igual que la ecuación diferencial, el problema integral permite concatenar soluciones.

Lema 2.5. *Si* $u^{(1)} \in C([0,T_1], \mathrm{H})$ *y* $u^{(2)} \in C([0,T_2], \mathrm{H})$ *son soluciones de* (2.3) *con datos iniciales* $u^{(1)}(0) = u_0^{(1)}$ *y* $u^{(2)}(0) = u_0^{(2)} = u^{(1)}(T_1)$*, entonces*

$$u(t) = \begin{cases} u^{(1)}(t), & si\ 0 \le t \le T_1 \\ u^{(2)}(t - T_1), & si\ T_1 \le t \le T_2 \end{cases},$$

es solución de (2.3) *en* $[0, T_1 + T_2]$.

2.4.2. Existencia local

Definición 2.12. La aplicación $B : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ es localmente Lipschitz continua, sii dado $r > 0$ existe $L > 0$ tal que para $u, v \in \mathrm{H}$ con $\|u\|, \|v\| \le r$ se verifica $\|B(u) - B(v)\| \le L\, \|u - v\|$.

Observemos que si B localmente Lipschitz continua, la función

$$L(r) = \sup_{\substack{\|u\|,\|v\| \le r \\ u \ne v}} \frac{\|B(u) - B(v)\|}{\|u - v\|},$$

es no decreciente. En este caso, el problema (2.3) admite una solución local:

Proposición 2.16. *Existe una aplicación* $\tau : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *no creciente tal que para* $u_0 \in \mathrm{H}$*, existe* $u \in C\left([0, \tau\left(\|u_0\|\right)], \mathrm{H}\right)$ *solución de* (2.3).

Demostración. La ecuación (2.3) se puede escribir como el problema de punto fijo

$$u\left(t\right) = \left(\Gamma u\right)\left(t\right) = f_{u_0}\left(t\right) - i\int_0^t W\left(t-s\right)\left(B\left(u\left(s\right)\right) - B\left(0\right)\right)ds.$$

donde $f_{u_0}\left(t\right) = W\left(t\right)u_0 - i\int_0^t W\left(t-s\right)B\left(0\right)ds$. Dado $u_0 \in \mathrm{H}$, para $T > 0$ definimos $\mathcal{X}_T\left(u_0\right)$ como el conjunto formado por las funciones $u \in C\left([0, T], \mathrm{H}\right)$ que verifican $u\left(0\right) = u_0$ y $\|u\left(t\right) - f_{u_0}\left(t\right)\| \leq 1/2$. Considerando la distancia inducida por la norma de $C\left([0, T], \mathrm{H}\right)$, el conjunto $\mathcal{X}_T\left(u_0\right)$ es cerrado y por lo tanto es un espacio métrico completo. Usando $W\left(t\right)$ unitario, para $u \in \mathcal{X}_T\left(u_0\right)$ obtenemos

$$\|f_{u_0}\left(t\right)\| \leq \|u_0\| + T\left\|B\left(0\right)\right\|$$

y $\max\limits_{0 \leq t \leq T}\|u\left(t\right)\| \leq 1/2 + \|u_0\| + T\left\|B\left(0\right)\right\| \leq 1 + \|u_0\|$, si $T\left\|B\left(0\right)\right\| \leq 1/2$. Sea $L = L\left(1 + \|u_0\|\right)$, entonces

$$\begin{aligned}\|\left(\Gamma u\right)\left(t\right) - f_{u_0}\left(t\right)\| \leq& \int_0^t \left\|B\left(u\left(s\right)\right) - B\left(0\right)\right\| ds \\ \leq& L\int_0^t \|u\left(s\right)\| ds \leq LT\left(1 + \|u\|_0\right).\end{aligned}$$

Vemos que si tomamos

$$T = \tau\left(\|u_0\|\right) = \min\left\{\left(2\left\|B\left(0\right)\right\|\right)^{-1}, \left(2\left(1 + \|u\|_0\right)L\right)^{-1}\right\},$$

se verifica $\Gamma u \in \mathcal{X}_T\left(u_0\right)$. Por otro lado, si $u, v \in \mathcal{X}_T\left(u_0\right)$

$$\begin{aligned}\|\left(\Gamma u\right)\left(t\right) - \left(\Gamma v\right)\left(t\right)\| \leq& L\int_0^t \|u\left(s\right) - v\left(s\right)\| ds \\ \leq& LT\max_{0 \leq t \leq T}\|u\left(t\right) - v\left(t\right)\|,\end{aligned}$$

como $LT \leq 1/2$, la aplicación $\Gamma : \mathcal{X}_T\left(u_0\right) \to \mathcal{X}_T\left(u_0\right)$ es una contracción. Por el teorema de punto fijo de Banach, existe una única $u \in \mathcal{X}_T\left(u_0\right)$ que verifica $u = \Gamma u$. En particular, u es una solución de (2.3) en el intervalo $[0, T]$. Podemos ver de la definición que τ es no creciente. □

2.4.3. Unicidad de las soluciones

Lema 2.6 (de Gronwall)**.** *Sea η una función continua y no negativa definida en el intervalo $[0,T]$, que verifica*

$$\eta(t) \leq a + \int_0^t \beta(s)\,\eta(s)\,ds,$$

donde β es una función integrable, no negativa. Se verifica

$$\eta(t) \leq a \exp\left(\int_0^t \beta(s)\,ds\right).$$

En particular, vale $\eta(t) = 0$ si $a = 0$.

Demostración. Consideremos

$$y(t) = \left(a + \int_0^t \beta(s)\,\eta(s)\,ds\right)\exp\left(-\int_0^t \beta(s)\,ds\right),$$

la función y es absolutamente continua y vale

$$y'(t) = \beta(t)\left(\eta(t) - a - \int_0^t \beta(s)\,\eta(s)\,ds\right)\exp\left(-\int_0^t \beta(s)\,ds\right) \leq 0.$$

Por lo tanto $y(t) \leq y(0) = a$, lo que implica

$$\eta(t) \leq y(t)\exp\left(\int_0^t \beta(s)\,ds\right) \leq a\exp\left(\int_0^t \beta(s)\,ds\right). \qquad \square$$

Proposición 2.17. *Si $u^{(1)} \in C([0,T_1],\mathrm{H})$ y $u^{(2)} \in C([0,T_2],\mathrm{H})$ son soluciones de (2.3) que verifican $u^{(1)}(0) = u^{(2)}(0)$, entonces $u^{(1)}(t) = u^{(2)}(t)$ para $0 \leq t \leq T = \min\{T_1, T_2\}$.*

Demostración. Sea $\max\limits_{0\leq t\leq T}\left\|u^{(1)}(t)\right\|, \max\limits_{0\leq t\leq T}\left\|u^{(2)}(t)\right\| \leq r$ y $L = L(r)$, se verifica

$$\begin{aligned}\left\|u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t)\right\| \leq& \int_0^t \left\|B\left(u^{(1)}(s)\right) - B\left(u^{(2)}(s)\right)\right\| ds\\ \leq& L\int_0^t \left\|u^{(1)}(s) - u^{(2)}(s)\right\| ds.\end{aligned}$$

De la desigualdad de Gronwall, obtenemos $\left\|u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t)\right\| = 0.$ $\square$

2.4.4. Intervalo de existencia y soluciones maximales

Proposición 2.18. *Sea* $T^* : \mathrm{H} \to (0, +\infty]$ *definido como*

$$T^* (u_0) = \sup \{T > 0 : \ \textit{existe } u \in C([0,T], \mathrm{H}) \ \textit{solución de } (2.3)\}.$$

Existe una única $u \in C([0, T^*(u_0)), \mathrm{H})$ *solución de* (2.3) *y verifica alguna de las siguientes alternativas:*

(a) $T^*(u_0) = +\infty$.

(b) $T^*(u_0) < +\infty$ *y* $\lim\limits_{t \uparrow T^*(u_0)} \|u(t)\| = +\infty$.

Demostración. Por la proposición 2.16, vemos que $T^*(u_0) \geq \tau(\|u_0\|) > 0$. Sea $T_n \uparrow T^*(u_0)$ y $u^{(n)} \in C([0, T_n], \mathrm{H})$ solución de (2.3), la proposición 2.17 implica que $u^{(n)}(t) = u^{(m)}(t)$, $0 \leq t \leq T_m$, si $n \geq m$. Por lo tanto, si definimos $u(t) = u^{(n)}(t)$ si $0 \leq t \leq T_n$, vemos que u está bien definida y verifica (2.3) en el intervalo $[0, T^*(u_0))$. Supongamos que $T^*(u_0) < +\infty$, si existe $T_n \uparrow T^*(u_0)$ tal que $\|u(T_n)\| \leq r$. Para n suficientemente grande, tenemos $T^*(u_0) < T_n + \tau(r)$, si $v \in C([0, \tau(r)], \mathrm{H})$ es la solución de (2.3) con dato inicial $v(0) = u(T_n)$, entonces por el lema 2.5 obtenemos una solución definida en $[0, T_n + \tau(r)]$ lo que contradice la definición de $T^*(u_0)$. □

Definición 2.13. Llamaremos a $T^*(u_0)$ tiempo de existencia de la solución y a $u \in C([0, T^*(u_0)), \mathrm{H})$ solución maximal.

Proposición 2.19. *Sea* $u_0 \in \mathrm{H}$, $0 < T < T^*(u_0)$ *y* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta$*, entonces* $T < T^*(\tilde{u}_0)$ *y se verifica* $\max\limits_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon$*, donde* $\tilde{u}, u$ *son las soluciones de* (2.3) *con datos iniciales* $\tilde{u}_0, u_0$ *respectivamente.*

Demostración. Definimos $r = \max\limits_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| + \varepsilon$, $L = L(r + \varepsilon)$ y $\delta = e^{-LT}\varepsilon$. Sea $\tilde{u}_0 \in \mathrm{H}$ con $\|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta$, si $T^*(\tilde{u}_0) \leq T$, entonces por la proposición 2.18, el conjunto

$$\mathcal{T}_\varepsilon = \{t \in (0, T^*(\tilde{u}_0)) : \|\tilde{u}(t) - u(t)\| > \varepsilon\}$$

es no vacío. Sea $T_\varepsilon = \inf \mathcal{T}_\varepsilon > 0$, por la continuidad de las soluciones se verifica $\|\tilde{u}(T_\varepsilon) - u(T_\varepsilon)\| = \varepsilon$. Por otro lado, como $\max\limits_{0 \leq t \leq T_\varepsilon} \|\tilde{u}(t)\| \leq r + \varepsilon$, vale la estimación

$$\|\tilde{u}(T_\varepsilon) - u(T_\varepsilon)\| \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\| + L \int_0^{T_\varepsilon} \|\tilde{u}(t) - u(t)\| \, dt,$$

usando el lema 2.6 obtenemos $\|\tilde{u}(T_\varepsilon) - u(T_\varepsilon)\| < \varepsilon e^{L(T_\varepsilon - T)} \leq \varepsilon$, lo que representa una contradicción. Por lo tanto $T < T^*(\tilde{u}_0)$ y usando nuevamente la desigualdad de Gronwall, obtenemos $\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon e^{L(t-T)} \leq \varepsilon$. □

Observación 2.7. Podemos ver que se extienden todos los resultados anteriores a soluciones $u \in C([-T, 0], \mathrm{H})$ del problema integral (2.3). Por lo tanto, para $u_0 \in \mathrm{H}$, existen $T^*, T_* > 0$ tiempos de existencia y una única $u \in C((-T_*, T^*), \mathrm{H})$ solución maximal con $u(0) = u_0$. Además, vale el resultado de semicontinuidad del tiempo de existencia y de la continuidad de las soluciones con respecto al dato inicial en intervalos compactos, de la proposición 2.19.

2.4.5. Flujo de la ecuación

Definimos $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathrm{H}$ como $\mathcal{D} = \{(t, u) : t \in (-T^*(u), T_*(u)), u \in \mathrm{H}\}$ y consideramos la aplicación $\Phi : \mathcal{D} \to \mathrm{H}$ dada por $\Phi(t, u_0) = u(t)$ donde u es la solución de (2.3).

Proposición 2.20. *El conjunto $\mathcal{D}$ es abierto y la aplicación Φ es continua. Además, para $(t_0, u_0) \in \mathcal{D}$, si $u_1 = \Phi(t_0, u_0)$, entonces $T^*(u_1) = T^*(u_0) - t_0$, $T_*(u_1) = T_*(u_0) + t_0$ y vale $\Phi(t_1, u_1) = \Phi(t_0 + t_1, u_1)$, para $(t_1, u_1) \in \mathcal{D}$.*

Corolario 2.4. *Sean u_0, u_1 como en la proposición anterior, entonces existen entornos $\mathcal{U}_j \subset \mathrm{H}$ de u_j que verifican $\Phi_{t_0} = \Phi(t_0, .) : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_1$ es un homeomorfismo Lipschitz continuo.*

Ejercicios:

2.16. Probar el lema 2.5.

2.17. Probar la existencia local y unicidad de soluciones reales en $\mathrm{H} = L^2(\mathbb{R})$ del problema integral asociado a

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = \sin u, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Estudiar la existencia de soluciones globales.

2.18. Dado el problema $u_t = B(u)$, $u(0) = 0$ en $\mathrm{H} = \mathbb{R}$, con

$$B(u) = \begin{cases} 3\sqrt[3]{u} & , \text{si } u \leq 1, \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2}u^2 & , \text{si } u > 1, \end{cases}$$

hallar T_0 tal que para todo $T^* \in (T_0, +\infty)$, existe $u \in C([0, T^*))$ solución del problema con $\lim\limits_{t \uparrow T^*} u(t) = +\infty$.

2.19. Sea $J \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ un operador unitario tal que $AJ = JA$ y $JB = B \circ J$. Probar que si $u \in C\left(\left(-T_*\left(u_0\right), T^*\left(u_0\right)\right), \mathrm{H}\right)$ es una solución del problema (2.3), entonces $v = Ju$ es la solucion con dato inicial $v(0) = Ju_0$ y se verifica $T^*\left(Ju_0\right) = T^*\left(u_0\right)$, $T_*\left(Ju_0\right) = T_*\left(u_0\right)$. Estudiar el caso J anti–unitario (J anti–lineal y $\|Ju\| = \|u\|$).

2.20. Probar la proposición 2.20.

Capítulo 3

Operadores Diferenciales

3.1. Espacios L^2 con peso

Sea $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible y positiva, definimos el espacio de Hilbert $L^2_\omega(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ medibles }, \|f.\omega\|_{L^2} < \infty\}$ con el producto interno

$$(f, g)_{L^2_\omega} = (f\omega, g\omega).$$

Si $\omega^s(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{s/2}$, denotamos $L^2_s(\mathbb{R}^n) = L^2_{\omega^s}(\mathbb{R}^n)$ con $s \in \mathbb{R}$.

Si consideramos $d\mu(x) = \omega^s(x)\,dx$, de la proposición 2.9 tenemos que si $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ medible es finita en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, D_m es un subespacio denso de $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ y el operador de multiplicación A_m es cerrado. Como vimos en el ejemplo 2.3, si m toma valores reales, A_m es autoadjunto.

Existe un isomorfismo natural Λ^s entre el espacio de Hilbert $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$, definido por $\Lambda^s f = \omega^s f$. Podemos identificar $L^2_s(\mathbb{R}^n)^* \equiv L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente forma: para $f \in L^2_{-s}(\mathbb{R}^n)$ definimos el funcional en $L^2_s(\mathbb{R}^n)$

$$\mu_f(g) = \left(\Lambda^{-s} f, \Lambda^s g\right)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f}(x)\, g(x)\, dx,$$

claramente $|\mu_f(g)| \leq \|f\|_{L^2_{-s}} \|g\|_{L^2_s}$. Por otro lado, si $\mu \in L^2_s(\mathbb{R}^n)^*$, por el teorema de Riesz, existe $h \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu(g) = (h, g)_{L^2_s}$, por lo tanto si definimos $f = \Lambda^{2s} h$, tenemos $\mu(g) = (\Lambda^{-s} f, \Lambda^s g)_{L^2}$ y se verifica

$$\|\mu\|_{L^{2*}_s} = \|h\|_{L^2_s} = \|f\|_{L^2_{-s}}.$$

Proposición 3.1. *Para $s > n/2$ se verifica $L^2_s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$*

Demostración. Si escribimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, \omega^s(x)\, \omega^{-s}(x)\, dx$$

por la desigualdad de Cauchy, tenemos $\|f\|_{L^1} \leq \|f.\omega^s\|_{L^2} \|\omega^{-s}\|_{L^2}$. Siendo $s > n/2$, vale $\|\omega^{-s}\|_{L^2} < \infty$. $\square$

Lema 3.1. *Dado $s > 0$, existe $C_s > 0$ tal que*

$$\omega^s(x) \leq C_s \left(\omega^s(x-y) + \omega^s(y)\right)$$

Proposición 3.2. *Si $f, g \in L^2_s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in L^2_s(\mathbb{R}^n)$ y vale*

$$\|f * g\|_{L^2_s} \leq C_s \left(\|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2_s} + \|f\|_{L^2_s} \|g\|_{L^1} \right).$$

Demostración. Por el lema 3.1, tenemos

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| \, \omega^s(x) \leq & C_s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, |g(y)| \, \omega^s(x-y) \, dy \right. \\ & \left. + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, |g(y)| \, \omega^s(y) \, dy \right). \end{aligned}$$

Como $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, de la desigualdad de Young obtenemos el resultado. $\square$

Corolario 3.1. *El espacio $L^2_s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach conmutativa con el producto de convolución y para $f_j \in L^2_s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, vale*

$$\|f_1 * \cdots * f_k\|_{L^2_s} \leq C_{s,k} \sum_{1 \leq j \leq k} \|f_j\|_{L^2_s} \prod_{\substack{1 \leq l \leq k \\ l \neq j}} \|f_l\|_{L^1}$$

Corolario 3.2. *Para $s > n/2$, $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach conmutativa con el producto de convolución.*

Proposición 3.3. *La aplicación $B : L^2_s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \to L^2_s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ definida por $B(u) = u^{*k} = u * \cdots * u$ es una localmente Lipschitz y verifica*

$$\begin{aligned} \|B(u)\|_{L^2_s} \leq & C_{s,k} \|u\|_{L^1}^{k-1} \|u\|_{L^2_s} \\ \|B(u) - B(v)\|_{L^2_s} \leq & C_{s,k} \left(\|u\|_{L^1} + \|v\|_{L^1}\right)^{k-2} \Big(\left(\|u\|_{L^1} + \|v\|_{L^1}\right) \|u - v\|_{L^2_s} \\ & + \left(\|u\|_{L^2_s} + \|v\|_{L^2_s} \right) \|u - v\|_{L^1} \Big) \end{aligned}$$

Proposición 3.4. *Dado $s > 0$, si $1 \leq p \leq 2$ verifica $\frac{1}{p} < \frac{1}{2} + \frac{s}{n}$, entonces $L^2_s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ y vale*

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^2}^{1-\theta} \| |\,.\,|^s f\|_{L^2}^{\theta},$$

donde $\theta = \frac{n}{s} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right)$.

Demostración. Dado $R > 0$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx = \int_{\{|x|\le R\}} |f(x)|^p \, dx + \int_{\{|x|>R\}} |f(x)|^p \, dx.$$

Usando la desigualdad de Hölder ($q = 2/p$, $q' = 2/(2-p)$), el primer término del lado derecho se puede acotar de la siguiente forma

$$\int_{\{|x|\le R\}} |f(x)|^p \, dx \le \left(\int_{\{|x|\le R\}} |f(x)|^2 \, dx \right)^{p/2} R^{n(1-p/2)} \le \|f\|_{L^2}^p R^{n(1-p/2)}$$

Podemos ver

$$\begin{aligned} \int_{\{|x|>R\}} |f(x)|^p \, dx &= \int_{\{|x|>R\}} |f(x)|^p |x|^{sp} |x|^{-sp} \, dx \\ &\le \| |\,.\,|^s f \|_{L^2}^p R^{n(1-p/2)-sp}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f\|_{L^p} \le C \left(\|f\|_{L^2} R^{n(1/p-1/2)} + \| |\,.\,|^s f \|_{L^2} R^{n(1/p-1/2)-s} \right)$$

Si tomamos $R = \left(\| |\,.\,|^s f \|_{L^2} / \|f\|_{L^2} \right)^{1/s}$, obtenemos el resultado. □

Proposición 3.5. *Dado $0 \le \theta \le 1$ para toda $f \in L_s^2(\mathbb{R}^n)$, se verifica $\|f\|_{L_{\theta s}^2} \le \|f\|_{L^2}^{1-\theta} \|f\|_{L_s^2}^{\theta}$.*

Demostración. Basta escribir $|f|^2 \omega^{2\theta s} = |f|^{2-2\theta} |f|^{2\theta} \omega^{2\theta s}$ y usar la desigualdad de Hölder con $q = 1/\theta$ y $q' = 1/(1-\theta)$. □

Observación 3.1. El grupo unitario W definido en la observación 2.5, es un grupo unitario en $L_s^2(\mathbb{R}^n)$, para $s \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.1. *Sea $W(t) = e^{-itm}$ con $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible que toma valores reales y B la aplicación definida por*

$$B(u) = \sum_{2 \le k+l \le d} \beta_{k,l} \, u^{*k} * \tilde{u}^{*l},$$

donde $\tilde{u}(x) = \overline{u}(-x)$, entonces para $s > n/2$ el problema integral (2.3) *está bien planteado en $L_s^2(\mathbb{R}^n)$. Los tiempos de existencia $T_s^*(u_0), T_{*s}(u_0)$ no dependen de s.*

Demostración. La observación 3.1 y la proposición 3.3 muestran que el problema verifica las condiciones de las proposiciones 2.16–2.19, por lo tanto el problema está bien planteado en $L_s^2(\mathbb{R}^n)$. Sea $r > s > n/2$ y $u_0 \in L_r^2(\mathbb{R}^n)$, como $L_r^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_s^2(\mathbb{R}^n)$, se verifica $T_r^*(u_0) \leq T_s^*(u_0)$. Usando nuevamente la proposición 3.3, obtenemos

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L_r^2} &\leq \|u_0\|_{L_r^2} + \int_0^t \|B(u(s))\|_{L_r^2}\, ds \\ &\leq \|u_0\|_{L_r^2} + C\int_0^t P\left(\|u(s)\|_{L^1}\right)\|u(s)\|_{L_r^2}\, ds\end{aligned}$$

donde $P(q) = \sum\limits_{2\leq k+l\leq d} |\beta_{k,l}|\, q^{k+l-1}$. Siendo $P(q)$ es creciente para $q \geq 0$ y $\|u\|_{L^1} \leq C_s \|u\|_{L_s^2}$, vale

$$\|u(t)\|_{L_r^2} \leq \|u_0\|_{L_r^2} + C\int_0^t P\left(\|u(s)\|_{L_s^2}\right)\|u(s)\|_{L_r^2}\, ds$$

Si $T = T_r^*(u_0) < T_s^*(u_0)$, tomando $L = C \max\limits_{0\leq t\leq T} P\left(\|u(t)\|_{L_s^2}\right)$, tenemos que la solución verifica $\sup\limits_{0\leq t<T} \|u(t)\|_{L_r^2} \leq \|u_0\|_{L_r^2} e^{LT}$, lo que contradice la proposición 2.18. □

3.2. Espacios de Sobolev

Definición 3.1. El espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ ($s \in \mathbb{R}$) está dado por las distribuciones $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ que verifican $\widehat{f} \in L_s^2(\mathbb{R}^n)$. Se define el producto

$$(f, g)_{H^s} = \left(\widehat{f}, \widehat{g}\right)_{L_s^2}.$$

Consideramos el operador $J^s = \mathcal{F}^{-1}\Lambda^s\mathcal{F}$, claramente es un isomorfismo isométrico de $H^s(\mathbb{R}^n)$ en $L_s^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{tikzcd} H^s(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "J^s"] \arrow[d, "\mathcal{F}"'] & L^2(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\ L_s^2(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\Lambda^s"] & L^2(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

Proposición 3.6. *Para $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert y vale $H^r(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$, si $r > s$.*

Proposición 3.7. *Si $s \in \mathbb{N}$, entonces*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n), |\alpha| \leq s \right\}$$

Demostración. Si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, usando que $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$ y la desigualdad $|\xi^\alpha| \leq |\xi|^{|\alpha|} \leq \omega^s(\xi)$, se verifica $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si $\partial_{x_j}^s f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f\|_{L^2}^2 + \sum_{1\leq j\leq n} \|\partial_{x_j}^s f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \sum_{1\leq j\leq n} |\xi_j|^{2s}\right) \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi,$$

usando que $\omega^s(\xi) \leq C\left(1 + \sum_{1\leq j\leq n} |\xi_j|^{2s}\right)$, tenemos $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. □

Definición 3.2. Consideramos el espacio

$$\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \right\},$$

con la norma $\|f\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^1}$, tenemos que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ es un subálgebra de $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) : f(x) \to 0 \text{ si } |x| \to \infty\}$

De los resultados de la sección 3.1, obtenemos

Proposición 3.8. *Para $s > n/2$ se verifica $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$*

Corolario 3.3. *Para $s > n/2 + k$ se verifica $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0^k(\mathbb{R}^n)$.*

Proposición 3.9. *El espacio $H^s(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach conmutativa con el producto usual y para $f_j \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, vale*

$$\|f_1 \dots f_k\|_{H^s} \leq C_{s,k} \sum_{1\leq j\leq k} \|f_j\|_{H^s} \prod_{\substack{1\leq l\leq k \\ l\neq j}} \|f_l\|_{\mathcal{A}}$$

Corolario 3.4. *Para $s > n/2$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach conmutativa con el producto usual.*

Proposición 3.10. *La aplicación $B : H^s(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ definida por $B(u) = u^k$ es una localmente Lipschitz y verifica*

$$\begin{aligned}
\|B(u)\|_{H^s} \leq& C_{s,k} \|u\|_{\mathcal{A}}^{k-1} \|u\|_{H^s} \\
\|B(u) - B(v)\|_{H^s} \leq& C_{s,k} (\|u\|_{\mathcal{A}} + \|v\|_{\mathcal{A}})^{k-2} ((\|u\|_{\mathcal{A}} + \|v\|_{\mathcal{A}}) \|u - v\|_{H^s} \\
&+ (\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s}) \|u - v\|_{\mathcal{A}})
\end{aligned}$$

Proposición 3.11. *Dado $s > 0$, si $2 \leq p \leq \infty$ verifica la desigualdad $\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{s}{n}$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ y vale*

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^2}^{1-\theta} \|D^s f\|_{L^2}^{\theta},$$

donde $\theta = \frac{n}{s}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$.

Proposición 3.12. *Dado $0 \leq \theta \leq 1$ para toda $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, se verifica $\|f\|_{H^{\theta s}} \leq \|f\|_{L^2}^{1-\theta} \|f\|_{H^s}^{\theta}$.*

Definición 3.3. Dada una función $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ medible, finita en casi todo punto y $s \in \mathbb{R}$, consideramos el subespacio denso $D_m \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ definido como

$$D_m = \left\{ f \in H^s(\mathbb{R}^n) : m\,\omega^s \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

y el operador (cerrado) seudo-diferencial $L_m : D_m \to H^s(\mathbb{R}^n)$ dado por $\widehat{L_m f} = m\widehat{f}$. Si existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $|m(\xi)| \leq C\omega^{\gamma}(\xi)$, L_m es un operador continuo de $H^s(\mathbb{R}^n)$ en $H^{s-\gamma}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.2. *Sea $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, finita en casi todo punto y una función $B : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $B(u) = \sum_{2 \leq k+l \leq d} \beta_{k,l}\, u\, \overline{u}$, entonces el problema integral* (2.3)*, asociado a la ecuación*

$$\begin{cases} iu_t = L_m u + B(u), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R}^n)$ si $s > n/2$, donde L_m es el operador seudo–diferencial de multiplicador m. Además, los tiempos de existencia $T_s^*(u_0)$, $T_{s*}(u_0)$ no dependen de s.

Proposición 3.13. *Si existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $|m(\xi)| \leq C\omega^{\gamma}(\xi)$, entonces para $s > n/2$, la solución verifica $u \in C^1((-T_*, T^*), H^{s-\gamma}(\mathbb{R}^n))$ y la ecuación diferencial* (3.1)*.*

Demostración. Consideramos $L_m : D_m \to H^{s-\gamma}(\mathbb{R}^n)$, como $m \leq C\omega^{\gamma}$, tenemos $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D_m$, lo que implica $B(u) \in C((-T_*, T^*), D_m)$. Usando que en $H^s(\mathbb{R}^n)$, y por lo tanto en $H^{s-\gamma}(\mathbb{R}^n)$, se verifica

$$u(t) = W_m(t)\, u_0 - iW_m(t) \int_0^t W_m(-s)\, B(u(s))\, ds,$$

del ejercicio 2.13 obtenemos que $u \in C^1((-T_*, T^*), H^{s-\gamma}(\mathbb{R}^n))$. $\square$

Ejemplo 3.1. Para $m(\xi) = |\xi|^2$ y $B(u) = \beta |u|^{2k} u$, (3.1) es la ecuación de Schrödinger

$$iu_t = -\Delta u + \beta |u|^{2k} u$$

y por el teorema 3.2, el problema integral está bien planteado en $H^s(\mathbb{R}^n)$ si $s > n/2$. Para $\beta \in \mathbb{R}$, si $s \geq 2$, tenemos $u \in C^1((-T_*, T^*), L^2(\mathbb{R}^n))$ y vale

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 = 2\mathrm{Re}\,(u_t, u)_{L^2} = 2\mathrm{Re}\,(i\Delta u, u)_{L^2} - 2\beta\mathrm{Re}\left(i |u|^{2k} u, u\right)_{L^2} = 0.$$

Por lo tanto $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$. Para dimensiones $n = 1, 2, 3$, $n/2 < 2$, sin embargo podemos extender la conservación de la carga ($\|u(t)\|_{L^2}$ constante) a $n/2 < s < 2$ usando la dependencia continua respecto a los datos iniciales (proposición 2.19).

Capítulo 4

Ecuación de Schrödinger

4.1. Generalidades

$$
\begin{cases} iu_t = -\Delta u \pm |u|^2 u \\ u_0 = u_0 \end{cases} \tag{4.1}
$$

4.2. Soluciones estacionarias

Buscamos soluciones de la forma $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi(x)$ de (4.1), vemos que ϕ debe verificar

$$-\omega\phi = -\phi'' \pm |\phi|^2 \phi$$

Si escribimos $\phi = \eta\, e^{i\theta}$, las ecuaciones para η, θ son

$$
\begin{aligned} 0 &= -\,\eta'' + \eta\,\theta'^{\,2} \pm \eta^3 + \omega\,\eta \\ 0 &= 2\eta'\theta' + \eta\,\theta'' \end{aligned} \tag{4.2}
$$

Multiplicando la segunda ecuación por η obtenemos $(\eta^2\theta')' = 0$, por lo tanto $\eta^2\theta' = L$ es constante. Despejando θ' y reemplazando en la primera ecuación, obtenemos $-\eta'' + L^2\eta^{-3} \pm \eta^3 + \omega\,\eta = 0$. Multiplicando por η', obtenemos

$$0 = -\eta''\eta' + L^2\eta^{-3}\eta' \pm \eta^3\eta' + \omega\,\eta\eta'$$

lo que implica $\mathcal{H}(\eta, \eta') = -\frac{1}{2}\eta'^{\,2} - \frac{1}{2}L^2\eta^{-2} \pm \frac{1}{4}\eta^4 + \frac{1}{2}\omega\,\eta^2 = E$ constante. Vemos que si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \eta(x) = 0$, entonces $L = 0$ y $E = 0$. Podemos despejar

$$\eta' = \pm\sqrt{\omega\,\eta^2 \pm \frac{1}{2}\eta^4} = \pm\sqrt{\omega}\eta\sqrt{1 - \frac{1}{2}\eta^2}$$

por lo tanto

$$\int \frac{d\eta}{\eta\sqrt{1-\frac{1}{2}\eta^2}} = \pm\sqrt{\omega}\, x$$

usando el cambio de variables $z = \sqrt{1-\frac{1}{2}\eta^2}$, vale $2dz = -\eta d\eta/\sqrt{1-\frac{1}{2}\eta^2}$

$$\int \frac{dz}{(1-z^2)} = \mp\sqrt{\omega}\, x$$

$$\mp 2\sqrt{\omega}\, x = \int \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) dz =$$